

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.63

- α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, η f' θα είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων. Οπότε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και

$$f'(x) = \sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow \boxed{f''(x)} = \left(\sqrt{1+f^2(x)} \right)' = \frac{\cancel{2f(x)}f'(x)}{\cancel{2}\sqrt{1+f^2(x)}} \stackrel{f'(x)=\sqrt{1+f^2(x)}}{=} =$$

$$= \frac{f(x)\cancel{\sqrt{1+f^2(x)}}}{\cancel{\sqrt{1+f^2(x)}}} = \boxed{f(x)}$$

Άρα $f''(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- β) Παρατηρούμε ότι

$$f'(0) = \sqrt{1+f^2(0)} \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} f'(0) = 1$$

Ακόμη

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} \boxed{\varphi'(x)} &= [f'(x) + f''(x)]e^{-x} - [f(x) + f'(x)]e^{-x} = \\ &= \cancel{f'(x)}e^{-x} + f''(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} - \cancel{f'(x)}e^{-x} \stackrel{f''(x)=f(x)}{=} = \\ &= f(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = \boxed{0} \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

$$\text{Ακόμη } \varphi(0) = [f(0) + f'(0)]e^0 \stackrel{\substack{f(0)=0 \\ f'(0)=1}}{\Rightarrow} \varphi(0) = 1$$

Οπότε $\boxed{\varphi(x) = 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ομοίως

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} \boxed{h'(x)} &= [f'(x) - f''(x)]e^x + [f(x) - f'(x)]e^x = \\ &= \cancel{f'(x)}e^x - f''(x)e^x + f(x)e^x - \cancel{f'(x)}e^x \stackrel{f''(x)=f(x)}{=} = \\ &= -f(x)e^x + f(x)e^x = \boxed{0} \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

$$\text{Ακόμη } h(0) = \left[f(0) - f'(0) \right] e^0 \overset{\substack{f(0)=0 \\ f'(0)=1}}{\Rightarrow} h(0) = -1$$

$$\text{Οπότε } \boxed{h(x) = -1} \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Από το ερώτημα β) έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 1 \\ h(x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [f(x) + f'(x)] e^{-x} = 1 \\ [f(x) - f'(x)] e^x = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) + f'(x) = e^x \\ f(x) - f'(x) = -\frac{1}{e^x} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} \Rightarrow$$

$$2f(x) = e^x - \frac{1}{e^x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δ) Έστω $(x(t), y(t))$ οι συντεταγμένες του σημείου την χρονική στιγμή t .
Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα είναι

$$y(t) = \frac{e^{2x(t)} - 1}{2e^{x(t)}}$$

$$x'(t) = -20 \text{ μονάδες / sec (1)}$$

$$x(t_0) = \ln 10 \text{ (2)}$$

ενώ ζητείται το $y'(t_0)$

Έχουμε

$$y(t) = \frac{e^{2x(t)} - 1}{2e^{x(t)}} \Rightarrow y'(t) = \frac{e^{2x(t)} 2x'(t) \cdot \cancel{e^{x(t)}} - (e^{2x(t)} - 1) \cdot \cancel{e^{x(t)}} x'(t)}{2 \cancel{e^{2x(t)}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{2e^{2x(t)} x'(t) - e^{2x(t)} x'(t) + x'(t)}{2e^{2x(t)}} \Rightarrow y'(t) = \frac{e^{2x(t)} x'(t) + x'(t)}{2e^{2x(t)}} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{θέτουμε } t=t_0}{\Rightarrow} y'(t_0) = \frac{e^{2x(t_0)} x'(t_0) + x'(t_0)}{2e^{2x(t_0)}} \overset{(1), (2)}{\Rightarrow} y'(t_0) = \frac{e^{2 \ln 10} (-20) + (-20)}{2e^{2 \ln 10}} \Rightarrow$$

$$\overset{e^{2 \ln 10} = 100}{\Rightarrow} y'(t_0) = \frac{-2000 - 20}{200} \Rightarrow y'(t_0) = -10,1 \text{ μονάδες / sec}$$