

ΘΕΜΑ Δ 36.62

- α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - 4x$, $x \in [0, +\infty)$
 Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων με
 $h'(x) = f'(x) - 4 = \ln(x^2 + e^4) - 4 = \ln(x^2 + e^4) - \ln e^4 \geq 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$
 με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Επομένως

για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι

$$x \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0) \Rightarrow f(x) - 4x \geq f(0) - 4 \cdot 0 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} f(x) - 4x \geq 0$$

- β) Παρατηρούμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, διότι

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + e^4) > 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + e^4) > \ln 1 \Leftrightarrow x^2 + e^4 > 1$$

που ισχύει

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ το σύνολο τιμών της

$$\text{είναι το } f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Όμως

$$f(0) = 0$$

και

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 4x, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = [0, +\infty)$$

- γ) Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 1) = +\infty$
 και επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x \ln x - x} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\ln x - x \cdot \frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^4)}{\ln x - 2} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{DLH}}}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\frac{x^2 + e^4}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + e^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $h:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = x[f(x) - 3] + (x - 1)[f(x) + 2]$$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= 0[f(0) - 3] + (0 - 1)[f(0) + 2] \stackrel{f(0)=0}{=} -2 < 0 \\ h(1) &= 1[f(1) - 3] + (1 - 1)[f(1) + 2] = f(1) - 3 \stackrel{f(x) \geq 4x \Rightarrow f(1) > 4}{>} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0) \cdot h(1) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x_0) - 3}{x_0 - 1} + \frac{f(x_0) + 2}{x_0} = 0$$