ΘΕΜΑ Δ 36.61

α) $f(x) \le x + \frac{f(1)+f(-1)}{2} \overset{\text{θέτουμε } x=1}{\Rightarrow} f(1) \le 1 + \frac{f(1)+f(-1)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2f(1) \le 2 + f(1) + f(-1) \Rightarrow f(1) - f(-1) \le 2$ (1)

$f(x) \le x + \frac{f(1)+f(-1)}{2} \overset{\text{θέτουμε } x=-1}{\Rightarrow} f(-1) \le -1 + \frac{f(1)+f(-1)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2f(-1) \le -2 + f(1) + f(-1) \Rightarrow 2 \le f(1) - f(-1)$ (2)

$(1), (2) \Rightarrow f(1) - f(-1) = 2$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - x - \frac{f(1)+f(-1)}{2}$.

Προφανώς είναι $g(x) \le 0$ για κάθε $x \in R$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R, με $g'(x) = f'(x) - 1$ (1)

Παρατηρούμε ότι $g(1) = f(1) - 1 - \frac{f(1)+f(-1)}{2} = \frac{2f(1) - 2 - f(1) - f(-1)}{2} =$

$= \frac{f(1) - f(-1) - 2}{2} \overset{f(1)-f(-1)=2}{\Rightarrow} g(1) = 0$

Οπότε ισχύει $g(x) \le 0 \Rightarrow g(x) \le g(1)$, για κάθε $x \in R$. Επομένως η συνάρτηση g έχει ολικό ελάχιστο στο $x_o = 1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $\boxed{g'(1) = 0} \overset{(1)}{\Rightarrow} f'(1) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(1) = 1}$

Ομοίως

Παρατηρούμε ότι
$g(-1) = f(-1) + 1 - \frac{f(1)+f(-1)}{2} = \frac{2f(-1) + 2 - f(1) - f(-1)}{2} = \frac{f(-1) - f(1) + 2}{2}$

$= -\frac{f(1) - f(-1) - 2}{2} \overset{f(1)-f(-1)=2}{\Rightarrow} g(-1) = 0$

Οπότε ισχύει $g(x) \le 0 \Rightarrow g(x) \le g(-1)$, για κάθε $x \in R$. Επομένως η συνάρτηση g έχει ολικό ελάχιστο στο $x_o = -1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $\boxed{g'(-1) = 0} \overset{(1)}{\Rightarrow} f'(-1) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(-1) = 1}$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x)=f(x)-1-f(-1)$, $x\in[-1,1]$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ ως διαφορά συνεχών

$$\left.\begin{aligned} h(-1) &= \cancel{f(-1)}-1-\cancel{f(-1)}=-1<0 \\ h(1) &= f(1)-1-f(-1) \overset{\alpha)\ \text{ερώτημα}}{=} 2-1=1>0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(-1)\cdot h(1)<0$$

Άρα σύμφωνα με το <u>θεώρημα Bolzano</u> η υπάρχει <u>τουλάχιστον ένα $x_o\in(-1,1)$</u>

, τέτοιο ώστε $h(x_o)=0 \Rightarrow f(x_o)-1-f(-1)=0 \Rightarrow f(x_o)=1+f(-1)$

δ) Εφαρμόζουμε το <u>θεώρημα μέσης τιμής</u> για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,x_o]$. Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[-1,x_o]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,x_o)$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του <u>θεωρήματος μέσης τιμής</u> οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,x_o)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_o)-f(-1)}{x_o+1}$ (1)

Επίσης

εφαρμόζουμε το <u>θεώρημα μέσης τιμής</u> για την συνάρτηση f στο διάστημα $[x_o,1]$. Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[x_o,1]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_o,1)$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του <u>θεωρήματος μέσης τιμής</u> οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(x_o,1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f(x_o)}{1-x_o}$ (2)

Άρα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2) \overset{(1),(2)}{=} \frac{f(x_o)-f(-1)}{x_o+1}+\frac{f(1)-f(x_o)}{1-x_o}=$$

$$=\frac{[f(x_o)-f(-1)](1-x_o)+[f(1)-f(x_o)](x_o+1)}{1-x_o^2}=$$

$$=\frac{\cancel{f(x_o)}-f(x_o)x_o-f(-1)+f(-1)x_o+f(1)x_o+f(1)-f(x_o)x_o-\cancel{f(x_o)}}{1-x_o^2}=$$

$$\overset{\alpha)\ \text{ερώτημα}}{=}\frac{f(-1)x_o+f(1)x_o+2-2f(x_o)x_o}{1-x_o^2}=$$

$$\overset{f(1)=2+f(-1)\ ,\ f(x_o)=1+f(-1)}{=}\frac{\cancel{f(-1)x_o}+\cancel{2x_o}+\cancel{f(-1)x_o}+2-\cancel{2x_o}-\cancel{2f(-1)x_o}}{1-x_o^2}=$$

$$=\frac{2}{1-x_o^2}$$