

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.60

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f'(x) + 1) \sin x - (f(x) + x) \eta \mu x - \sin x \Rightarrow \\ &= \sin x (f'(x) + 1 - 1) - (f(x) + x) \eta \mu x \stackrel{\alpha) \text{ ερώτημα}}{=} \\ &= \sin x (f(x) + x)^2 - (f(x) + x) \eta \mu x \end{aligned}$$

Επίσης η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= g'(x) e^{h(x)} + g(x) h'(x) e^{h(x)} = e^{h(x)} [g'(x) + g(x) h'(x)] = \\ &= e^{h(x)} \{ \sin x (f(x) + x)^2 - (f(x) + x) \eta \mu x - [(f(x) + x) \sin x - \eta \mu x] (f(x) + x) \} \\ &= e^{h(x)} (f(x) + x) \{ \sin x (f(x) + x) - \eta \mu x - (f(x) + x) \sin x + \eta \mu x \} = \\ &= e^{h(x)} (f(x) + x)^2 (\sin x - \sin x) = 0 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση φ είναι σταθερή

β) Έχουμε

$$\begin{aligned} g(0) &= (f(0) + 0) \sin 0 - \eta \mu 0 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} g(0) = 0 \quad (1) \\ \varphi(0) &= g(0) e^{h(0)} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \varphi(0) = 0 \end{aligned}$$

Οπότε αφού η συνάρτηση φ είναι σταθερή, θα ισχύει για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow g(x) e^{h(x)} = 0 \stackrel{e^{h(x)} \neq 0}{\Rightarrow} g(x) = 0 \Rightarrow (f(x) + x) \sin x - \eta \mu x = 0$$

$$\Rightarrow (f(x) + x) \sin x = \eta \mu x \stackrel{\sin x \neq 0}{\Rightarrow} f(x) + x = \frac{\eta \mu x}{\sin x} \Rightarrow f(x) = \varepsilon \varphi x - x$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{2006}} \stackrel{\beta) \text{ ερώτημα}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon \varphi x - x}{x^{2006}} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2006} x^{2005} - 1}{2006 x^{2005}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sin^2 x}{2006 x^{2005}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu^2 x}{2006 x^{2005} \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2006 \sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu^2 x}{x^{2005}} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu^2 x}{x^{2005}} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$= \frac{1}{2006} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \eta \mu x \sin x}{2005 x^{2004}} = \frac{2}{2006 \cdot 2005} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x^{2004}} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x^{2004}} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{2006 \cdot 2005} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \nu x}{2004 x^{2003}} = \frac{2}{2006 \cdot 2005 \cdot 2004} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2003}} = \\
&= \frac{2}{2006 \cdot 2005 \cdot 2004} (+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

δ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 |f(x)| dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 |\varepsilon \varphi x - x| dx$

Πρέπει τώρα να βρούμε το πρόσημο της $f(x)$.

Είναι $f'(x) = \frac{1}{\sigma \nu^2 x} - 1 = \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^2 x} > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$. Έτσι για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ είναι

$$x \leq 0 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) \leq f(0) \stackrel{f(0) = \varepsilon \varphi 0 - 0}{\Rightarrow} f(x) \leq 0$$

Επομένως

$$E = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 -f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (x - \varepsilon \varphi x) dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 x dx - \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \varepsilon \varphi x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{\pi}{3}}^0 + \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{-\eta \mu x}{\sigma \nu x} dx =$$

$$= -\frac{\pi^2}{18} + \left[\ln |\sigma \nu x| \right]_{-\frac{\pi}{3}}^0 = -\frac{\pi^2}{18} + \ln |\sigma \nu 0| - \ln \left| \sigma \nu \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right| =$$

$$= -\frac{\pi^2}{18} + \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{\pi^2}{18}$$