

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.6

- α) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αφού και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει :

$$h'(x) = (e^{-x}f(x) - e^{-4x})' \Rightarrow h'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) + 4e^{-4x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x) + 4e^{-3x}) \stackrel{f'(x)-f(x)=-4e^{-3x}}{\Rightarrow} h'(x) = 0$$

Άρα $h(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- β) Για $x=0$: $h(0) = c \Rightarrow c = e^0 \cdot f(0) - e^0 \stackrel{f(0)=2}{\Rightarrow} c = 1$

Άρα $h(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^{-x}f(x) - e^{-4x} = 1 \Rightarrow e^{-x}f(x) = 1 + e^{-4x} \Rightarrow f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$$

γ) $I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha (e^x + e^{-3x}) dx = \int_0^\alpha e^x dx + \int_0^\alpha e^{-3x} dx =$

$$= [e^x]_0^\alpha + \left[\frac{-e^{-3x}}{3} \right]_0^\alpha = e^\alpha - 1 - \frac{e^{-3\alpha}}{3} + \frac{1}{3} = e^\alpha - \frac{e^{-3\alpha}}{3} - \frac{2}{3}$$

δ) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{I(\alpha)}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\alpha}{\alpha^2} - \frac{e^{-3\alpha}}{3\alpha^2} - \frac{2}{3\alpha^2} \right)$

Έχουμε : $\bullet \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{e^\alpha}{\alpha^2} \stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{\text{DLH}}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{e^\alpha}{2\alpha} \stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{\text{DLH}}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{e^\alpha}{2} = +\infty$

$\bullet \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{-e^{-3\alpha}}{3\alpha^2} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{3\alpha^2 e^{3\alpha}} \right) = 0$ γιατί $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (3\alpha^2 e^{3\alpha}) = +\infty$

$\bullet \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{3\alpha^2} \right) = 0$

Άρα $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{I(\alpha)}{\alpha^2} = +\infty$