Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.59

α) Έστω x_1 , $x_2 \in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε

$$|f(x)-f(y)| \geq 2|x-y| \overset{\text{θέτουμε } x=x_1 \text{ και } y=x_2}{\Rightarrow} |f(x_1)-f(x_2)| \geq 2|x_1-x_2| \overset{f(x_1)=f(x_2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow |x_1-x_2| \leq 0 \overset{|x_1-x_2|\geq 0}{\Rightarrow} |x_1-x_2| = 0 \Rightarrow x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι 1-1

β) $$|f(x)-f(y)| \geq 2|x-y| \overset{|x-y|>0}{\Rightarrow} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \geq 2 \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \geq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq -2 \quad \text{ή} \quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 2$$

Άρα $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq -2$ ή $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 2$

Άρα $f'(y) \leq -2$ ή $f'(y) \geq 2$ για κάθε $y \in R$. Άρα $f'(x) \neq 0$ και αφού η f' είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο

Αν ίσχυε $f'(y) \leq -2$ για κάθε $y \in R$, τότε η f θα ήταν γνησίως φθίνουσα , <u>άτοπο</u> διότι $f(3) > f(2)$. Άρα $f'(y) \geq 2$ για κάθε $y \in R$ δηλαδή $f'(x) \geq 2$ για κάθε $x \in R$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(f(x)) - 3x$, $x \in R$. Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = f'(f(x))f'(x) - 3 \overset{f'(f(x))\geq 2\,,\, f'(x)\geq 2 \Rightarrow f'(f(x))f'(x)\geq 4}{\Rightarrow} h'(x) > 0$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα , άρα και 1-1. Οπότε η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f(f(x))=3x$ <u>έχει το πολύ μία πραγματική λύση</u>

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = 2^{x+1} - x^2 - x - 2$

Έχουμε ισοδύναμα

$$f(2^{x+1}-x^2) = f(x+2) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} 2^{x+1}-x^2 = x+2 \Leftrightarrow 2^{x+1}-x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=0$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει λύσεις <u>μόνο</u> τους αριθμούς 0 , 1 και 2

Πράγματι

$g(0) = 2^{0+1} - 0^2 - 0 - 2 = 0$

$g(1) = 2^{1+1} - 1^2 - 1 - 2 = 0$

$g(2)=2^{2+1}-2^2-2-2=0$

Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ <u>έχει λύσεις τους αριθμούς 0 , 1 και 2</u>. Θα αποδείξουμε ότι <u>δεν έχει άλλες λύσεις</u>

Η g είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με
$g'(x)=2^{x+1}\ln 2-2x-1 \Leftrightarrow g''(x)=2^x\ln^2 2-2$, $x\in R$

Παρατηρούμε ότι $g''(x)=0 \Leftrightarrow 2^x\ln^2 2-2=0 \Leftrightarrow 2^x\ln^2 2=2 \Leftrightarrow 2^x=\dfrac{2}{\ln^2 2}$ (1)

Η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα άρα και η <u>g'' έχει ακριβώς μία ρίζα</u>

Έστω ότι υπάρχει και τέταρτη ρίζα της g , δηλαδή έστω ότι υπάρχει $\rho_4\in R$ έστω $\rho_4<0$ τέτοιο ώστε $g(\rho_4)=0$. Τότε

η g είναι συνεχής στο διάστημα $[\rho_4,0]$ ως πράξεις συνεχών
η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\rho_4,0)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων
και $g(\rho_4)=g(0)=0$

Επομένως σύμφωνα με το <u>θεώρημα Rolle</u> υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\rho_4,0)$, τέτοιο ώστε $g'(\xi_1)=0$

Ομοίως
η g είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών
η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων
και $g(0)=g(1)=0$
Επομένως σύμφωνα με το <u>θεώρημα Rolle</u> υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $g'(\xi_2)=0$

η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών
η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων
και $g(1)=g(2)=0$
Επομένως σύμφωνα με το <u>θεώρημα Rolle</u> υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_3\in(1,2)$, τέτοιο ώστε $g'(\xi_3)=0$

Όμως

η g' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ ως πράξεις συνεχών
η g' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_1,ξ_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων
και $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$

Επομένως σύμφωνα με το <u>θεώρημα Rolle</u> υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(\xi_1,\xi_2)$, τέτοιο ώστε $g''(x_1)=0$

Ομοίως
η g' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_2,\xi_3]$ ως πράξεις συνεχών
η g' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_2,ξ_3) ως πράξεις παραγωγίσιμων
και $g'(\xi_2)=g'(\xi_3)=0$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\xi_2, \xi_3)$, τέτοιο ώστε $g''(x_2) = 0$

Άρα η g'' έχει δύο ρίζες. Άτοπο διότι είδαμε ότι η g'' έχει μία μόνο ρίζα

Άρα δεν υπάρχει τέταρτη ρίζα της g , άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει λύσεις μόνο τους αριθμούς 0 , 1 και 2