Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.58

α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x)=e^{-x}\cdot F(x)$, $x\in[0,+\infty)$

Επειδή η F είναι παραγωγίσιμη , η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$h'(x)=\left(e^{-x}\right)'\cdot F(x)+e^{-x}F'(x)=-e^{-x}\cdot F(x)+e^{-x}f(x)=$$

$$=e^{-x}\left[f(x)-F(x)\right]\overset{f(x)>F(x)}{>}0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε για κάθε $x\in[0,+\infty)$ θα είναι

$$x\ge 0\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)\ge h(0)\Rightarrow e^{-x}\cdot F(x)\ge e^{0}\cdot F(0)\overset{F(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{-x}\cdot F(x)\ge 0\overset{e^{-x}>0}{\Rightarrow}F(x)\ge 0\overset{f(x)>F(x)}{\Rightarrow}\boxed{f(x)>0}$$

β) Έχουμε ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=f(x)>0$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1−1

Οπότε

$$\int_2^{\alpha}f(x)dx=0\Rightarrow F(\alpha)-F(2)=0\Rightarrow F(\alpha)=F(2)\overset{F:1-1}{\Rightarrow}\boxed{\alpha=2}$$

γ) <u>Έστω ότι</u> υπάρχει $x_o\in[0,+\infty)$ με $g(x_o)=0$ τότε

$$g(x)g'(x)=f(x)\overset{x=x_o}{\Rightarrow}g(x_o)g'(x_o)=f(x_o)\overset{g(x_o)=0}{\Rightarrow}f(x_o)=0$$ <u>άτοπο</u>

διότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Άρα για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι $g(x)\neq 0$. Οπότε επειδή η g είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) θα <u>διατηρεί σταθερό πρόσημο</u> σε όλο το $[0,+\infty)$. Και επειδή $g(1)=\sqrt{2F(1)}\Rightarrow g(1)>0$ θα είναι

$g(x)>0$ (1) για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Επομένως για κάθε $x\in[0,+\infty)$ θα είναι

$$g(x)g'(x)=f(x)\overset{g(x)\neq 0}{\Rightarrow}g'(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\overset{f(x)>0,\,g(x)>0}{\Rightarrow}g'(x)>0$$

και άρα <u>η g είναι γνησίως αύξουσα στο [0,+∞)</u>

δ) $\int_0^1 g^2(x)dx=\int_0^1(x)'g^2(x)dx=\left[xg^2(x)\right]_0^1-\int_0^1 x\left[g^2(x)\right]'dx=$

$$=1\cdot g^2(1)-0\cdot g^2(0)-\int_0^1 x\cdot 2g(x)g'(x)dx=g^2(1)-2\int_0^1 xg(x)g'(x)dx=$$

$$\overset{g(x)g'(x)=f(x)}{=}g^2(1)-2\int_0^1 xf(x)dx=g^2(1)-2\int_0^1 xF'(x)dx=$$

$$=g^2(1)-2\left(\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 (x)'F(x)dx\right)=$$

$$=g^2(1)-2F(1)+2\int_0^1 F(x)dx\overset{g(1)=\sqrt{2F(1)}\Rightarrow g^2(1)=2F(1)}{=}$$

$$\cancel{2F(1)}-\cancel{2F(1)}+2\int_0^1 F(x)dx=2\int_0^1 F(x)dx$$