

α) Είναι

$$f(x)e^{f(x)} = x \Rightarrow f(x) = \frac{x}{e^{f(x)}} \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad (1)$$

Ακόμη

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow e^{f(x)} \geq e^0 \Rightarrow e^{f(x)} \geq 1 \xrightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } f(x) \geq 0} f(x)e^{f(x)} \geq f(x) \xrightarrow{f(x)e^{f(x)} = x} x \geq f(x) \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $0 \leq f(x) \leq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

β) i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\text{Είναι } 0 \leq f(x) \leq x \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} 0 \leq f(0) \leq 0. \text{ Άρα } f(0) = 0 \quad (3)$$

Ακόμη

$$\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq x & \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, άρα η συνάρτηση f , είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

ii) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{f(0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \stackrel{f(x)e^{f(x)}=x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e^{f(x)}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{f(x)}} \stackrel{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=f(0)=0}{=} \frac{1}{e^0} = 1$$

Άρα το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση f , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$

γ) $f(x)e^{f(x)} = x \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x)e^{f(x)} + f(x)f'(x)e^{f(x)} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)[e^{f(x)} + f(x)e^{f(x)}] = 1 \xrightarrow{f(x)e^{f(x)}=x} f'(x)(e^{f(x)} + x) = 1 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{e^{f(x)}+x \neq 0} f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + x} \stackrel{\begin{cases} e^{f(x)} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow e^{f(x)} + x > 0}{\Rightarrow} f'(x) > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

$$\delta) \int_0^1 \frac{1}{1+f(x)} dx \stackrel{f(x)e^{f(x)}=x \Rightarrow f(x)=-\frac{x}{e^{f(x)}}}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x}{e^{f(x)}}} dx = \int_0^1 \frac{e^{f(x)}}{e^{f(x)}+x} dx \Rightarrow$$

$$\stackrel{f'(x)=-\frac{1}{e^{f(x)}+x}}{=} \int_0^1 e^{f(x)} f'(x) dx = \int_0^1 \left[e^{f(x)} \right]' dx = \left[e^{f(x)} \right]_0^1 = e^{f(1)} - e^{f(0)} =$$

$$\stackrel{f(0)=0}{=} e^{f(1)} - 1$$