

α) Επειδή ισχύει $[f(x)]^2 \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

θα είναι $[f(x)]^2 = 0$ (1)

διότι αν η $[f(x)]^2$ δεν ήταν παντού ίση με μηδέν, σύμφωνα με γνωστή πρόταση,

θα ισχύε $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 dx > 0$ άτοπο διότι $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 dx = 0$

Άρα $[f(x)]^2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

β) $\int_0^1 [g'(x)]^2 dx + 4 \int_0^1 [g(x)]^2 dx = 2[g(1)]^2 - 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 [g'(x)]^2 + 4[g(x)]^2 dx = 2[g(1)]^2 - 8 \quad \xRightarrow{\text{αφαιρούμε το } \int_0^1 4g(x)g'(x)dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [g'(x)]^2 + 4[g(x)]^2 dx - \int_0^1 4g(x)g'(x)dx =$$

$$= 2[g(1)]^2 - 8 - \int_0^1 4g(x)g'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [g'(x)]^2 - 4g(x)g'(x) + [2g(x)]^2 dx = 2[g(1)]^2 - 8 - \int_0^1 [2g^2(x)]' dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [g'(x) - 2g(x)]^2 dx = 2[g(1)]^2 - 8 - [2g^2(x)]_0^1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [g'(x) - 2g(x)]^2 dx = 2[g(1)]^2 - 8 - [2g^2(1) - 2g^2(0)]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [g'(x) - 2g(x)]^2 dx = \cancel{2[g(1)]^2} - 8 - \cancel{2g^2(1)} + 2g^2(0)$$

$$\xRightarrow{g(0)=2} \Rightarrow \int_0^1 [g'(x) - 2g(x)]^2 dx = 0 \quad \xRightarrow{\text{Α. ερώτημα}}$$

$$\Rightarrow g'(x) - 2g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

γ) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = (e^{-2x})' g(x) + e^{-2x} g'(x) = -2e^{-2x} g(x) + e^{-2x} g'(x) =$$

$$= e^{-2x} [g'(x) - 2g(x)] \stackrel{\text{Β. α) ερώτημα}}{=} 0$$

Άρα $h'(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και σύμφωνα με γνωστή πρόταση η h θα είναι σταθερή για κάθε $x \in [0, 1]$

Ακόμη επειδή $h(0) = e^{-2 \cdot 0} g(0) \stackrel{g(0)=2}{=} 2$ θα είναι

$$h(x) = 2, \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

Άρα για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $h(x) = 2 \Rightarrow e^{-2x} g(x) = 2 \Rightarrow g(x) = 2e^{2x}$

δ) Έχουμε ισοδύναμα $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2} \Leftrightarrow 2g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < g(\alpha)+g(\beta) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha) < g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \beta - \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} < \frac{g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \quad (2)$$

Αρκεί λοιπόν να αποδειχτεί η σχέση (2)

Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με

$$g(x) = 2e^{2x} \Rightarrow g'(x) = 4e^{2x} \Rightarrow g''(x) = 8e^{2x} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in [0,1]$$

Άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$

Ακόμη

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση g στο διάστημα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$. Έχουμε

η g είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$

η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right), \text{ τέτοιο ώστε } g'(\xi_1) = \frac{g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \quad (2)$$

Επίσης

εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση g στο διάστημα $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$. Έχουμε

η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$

η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right), \text{ τέτοιο ώστε } g'(\xi_2) = \frac{g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \quad (3)$$

Ακόμη $\alpha < \xi_1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2 < \beta$. Άρα $\xi_1 < \xi_2$

Οπότε

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{g' \nearrow}{\Rightarrow} g'(\xi_1) < g'(\xi_2) \stackrel{(2), (3)}{\Rightarrow} \frac{g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} < \frac{g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}}$$