

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.55

α) Επειδή $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ακόμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$f'(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} = f(x) \Rightarrow f(x)f'(x) + f'(x) = f^2(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)[f(x) + 1] = f^2(x) \stackrel{f(x) > 0 \Rightarrow 1 + f(x) \neq 0}{\Rightarrow} f'(x) = \frac{f^2(x)}{f(x) + 1} \Rightarrow$$

$$\stackrel{f(x) > 0 \Rightarrow 1 + f(x) > 0}{\Rightarrow} f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Θέτουμε $h(x) = \ln f(x) - \frac{1}{f(x)}$,

Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \stackrel{f'(x) = \frac{f^2(x)}{f(x)+1}}{=} \frac{\cancel{f^2(x)}}{\cancel{f(x)} + 1} + \frac{\cancel{f^2(x)}}{\cancel{f^2(x)}} = \\ &= \frac{f(x)}{f(x) + 1} + \frac{1}{f(x) + 1} = \frac{f(x) + 1}{f(x) + 1} = 1 \end{aligned}$$

Άρα

$$h'(x) = 1 \Rightarrow h'(x) = (x)' \Rightarrow h(x) = x + c \Rightarrow$$

$$\ln f(x) - \frac{1}{f(x)} = x + c \quad (1), \quad c: \text{σταθερά}$$

Όμως

$$(1) \stackrel{\text{θέτουμε } x=-1}{\Rightarrow} \ln f(-1) - \frac{1}{f(-1)} = -1 + c \stackrel{f(-1)=1}{\Rightarrow} c = 0 \quad (2)$$

Οπότε

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \ln f(x) - \frac{1}{f(x)} = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι 1-1 και άρα αντιστρέψιμη.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} , θα είναι το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $(0, +\infty)$

Ακόμη

$$\ln f(x) - \frac{1}{f(x)} = x \quad \overset{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)}{\Rightarrow} \ln f(f^{-1}(x)) - \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = f^{-1}(x) \Rightarrow$$

$$\overset{f(f^{-1}(x))=x}{\Rightarrow} f^{-1}(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} \quad \overset{x>0 \Rightarrow x+1>0}{\Rightarrow} (f^{-1})'(x) > 0$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

δ) Παρατηρούμε ότι $f^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{\frac{1}{e}} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = -1 - e \Rightarrow f(-1 - e) = \frac{1}{e}$ (3)

Οπότε

$$\int_{-1}^{-e-1} f(x) dx \quad \overset{\substack{y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y) \Rightarrow x=\ln y - \frac{1}{y} \Rightarrow dx = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}\right) dy \\ \text{για } x=-1 \Rightarrow y=f(-1)=1 \\ \text{για } x=-e-1 \Rightarrow y=f(-e-1) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{e}}}{=} \int_1^{\frac{1}{e}} y \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy =$$

$$= \int_1^{\frac{1}{e}} \left(1 + \frac{1}{y} \right) dy = [y + \ln y]_1^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} + \ln \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e} - 2 = \frac{1-2e}{e}$$