ΘΕΜΑ Δ 36.54

α) Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε έχουμε $f(x_1)=f(x_2)$

$$\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2)) \overset{f(f(x))=\alpha e^x}{\Rightarrow} \alpha e^{x_1}=\alpha e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \Rightarrow x_1=x_2$$

<u>Άρα η f είναι 1-1</u> στο R

β) Για κάθε $x \in R$ είναι

$$f(f(x))=\alpha e^x \Rightarrow f(f(f(x)))=f(\alpha e^x) \quad (1)$$

Επίσης για κάθε $x \in R$ είναι

$$f(f(x))=\alpha e^x \overset{\text{θέτουμε όπου x το } f(x)}{\Rightarrow} f(f(f(x)))=\alpha e^{f(x)} \quad (2)$$

$(1),(2) \Rightarrow f(\alpha e^x)=\alpha e^{f(x)}$, για κάθε $x \in R$

γ) i) Αφού η εξίσωση $f(f(x))=x$ έχει λύση την $x=x_o$, θα είναι $f(f(x_o))=x_o \quad (3)$

Οπότε

$$f(f(x))=\alpha e^x \overset{\text{θέτουμε όπου x το } x_o}{\Rightarrow} f(f(x_o))=\alpha e^{x_o} \overset{(3)}{\Rightarrow} x_o=\alpha e^{x_o} \overset{e^{x_o}\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{x_o}{e^{x_o}} \quad (4)$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση g με $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$, $x \in R$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{\cancel{e^x}(1-x)}{e^{\cancel{2}x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$

Οπότε $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$g'(x)>0$ για κάθε $x>1$ και
$g'(x)<0$ για κάθε $x<1$

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\infty,1)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$		↗	$\boxed{\frac{1}{e}}$ max	↘	

Από τον πίνακα μονοτονίας φαίνεται ότι για κάθε $x\in R$, είναι

$$g(x)\le g(1)\Rightarrow \frac{x}{e^{x}}\le\frac{1}{e}\overset{\text{θέτουμε όπου x το } x_o}{\Rightarrow}\frac{x_o}{e^{x_o}}\le\frac{1}{e}\overset{(4)}{\Rightarrow}\ \alpha\le\frac{1}{e}$$

ii) Από το β) ερώτημα είναι

$$f\left(\alpha e^{x}\right)=\alpha e^{f(x)}\overset{\text{θέτουμε όπου x το } x_o}{\Rightarrow}f\left(\alpha e^{x_o}\right)=\alpha e^{f(x_o)}\overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$f\left(\frac{x_o}{\cancel{e^{x_o}}}\cancel{e^{x_o}}\right)=\frac{x_o}{e^{x_o}}e^{f(x_o)}\Rightarrow f\left(x_o\right)e^{x_o}=x_o e^{f(x_o)}$$

δ) Είναι

$$g(x)=\left(\ln x_o-\ln\alpha\right)(x+1)-\alpha e^{x}\Rightarrow g(x)=\ln\frac{x_o}{\alpha}(x+1)-\alpha e^{x}\overset{x_o=\alpha e^{x_o}\overset{\alpha\neq0}{\Rightarrow}\frac{x_o}{\alpha}=e^{x_o}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow g(x)=\ln e^{x_o}(x+1)-\alpha e^{x}\Rightarrow g(x)=x_o(x+1)-\alpha e^{x}\Rightarrow$$

$$\overset{x_o=\alpha e^{x_o}}{\Rightarrow}\ g(x)=\alpha e^{x_o}(x+1)-\alpha e^{x}$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\alpha e^{x_o}-\alpha e^{x}=\alpha\left(e^{x_o}-e^{x}\right)$$

Είναι $g'(x)=0\Rightarrow\alpha\left(e^{x_o}-e^{x}\right)=0\Rightarrow x=x_o$

και $g'(x)>0\Rightarrow\alpha\left(e^{x_o}-e^{x}\right)>0\overset{\alpha>0}{\Rightarrow}e^{x_o}>e^{x}\Rightarrow x<x_o$

Η f έχει πεδίο ορισμού το R. Είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική , με

$$f'(x)=2x-4\Rightarrow f'(x)=2(x-2)$$

Είναι $f'(x)=0\Rightarrow x=2$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	x_o	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	τμ	↘

Από τον πίνακα αυτό φαίνεται ότι η g παρουσιάζει μέγιστο στο x_o ίσο με

$$g(x_o)\overset{g(x)=\alpha e^{x_o}(x+1)-\alpha e^{x}}{=}\alpha e^{x_o}(x_o+1)-\alpha e^{x_o}\overset{\alpha e^{x_o}=x_o}{=}x_o(x_o+1)-x_o=x_o^2+\cancel{x_o}-\cancel{x_o}=x_o^2$$