

α) Έχουμε

$$\sqrt{x^2+1} \cdot f'(x) + \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0 \Rightarrow \left[\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) \right]' = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) \right]' = (x)' \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \cdot f(x) = x + c \quad (1)$$

$$(1) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} \sqrt{0^2+1} \cdot f(0) = 0 + c \xrightarrow{f(0)=0} c = 0 \quad (2)$$

Έτσι

$$(1) \xrightarrow{(2)} \sqrt{x^2+1} \cdot f(x) = x \xrightarrow{\sqrt{x^2+1} \neq 0} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x^2}{\sqrt{x^2+1}^2} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Ακόμη

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(x) = (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}(x^2+1)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \Rightarrow f''(x) = -3x(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ με } f(0) = 0$$

Τα πρόσημα της f'' η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f(x)		σ.κ.	

Δηλαδή η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$, κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(0, f(0) = 0)$ δηλαδή στο $(0, 0)$

γ) Έχουμε ισοδύναμα

$$2x - 2\ln(x+1) \geq \ln(e^{2x} + 1) - \ln(x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln e^x - 2\ln(x+1) \geq \ln \frac{e^{2x} + 1}{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\ln e^x - \ln(x+1)\right] \geq \ln \frac{e^{2x} + 1}{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow 2\ln \frac{e^x}{x+1} \geq \ln \frac{e^{2x} + 1}{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{e^x}{x+1} \right)^2 \geq \ln \frac{e^{2x} + 1}{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow \left(\frac{e^x}{x+1} \right)^2 \geq \frac{e^{2x} + 1}{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & x+1>0 \\ & e^{2x}+1>0, \quad e^x>0 \\ & x^2+2x+2>0 \\ & \Leftrightarrow \frac{e^x}{x+1} \geq \frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{\sqrt{x^2+2x+1+1}} \Leftrightarrow \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} \geq \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(e^x) \geq f(x+1) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} e^x \geq x+1, \quad \text{που ισχύει}$$

$$\delta) \quad \int_0^4 \sqrt{x + (x^2 + 1)} f'(x) \sqrt{x} \, dx = \int_0^4 \sqrt{x + \cancel{(x^2 + 1)} \frac{x^2}{\cancel{x^2 + 1}}} \sqrt{x} \, dx = \int_0^4 \sqrt{x + x^2} \sqrt{x} \, dx =$$

$$\begin{aligned} & \text{θέτουμε } y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \\ & \Rightarrow dx = 2y \, dy \\ & \text{για } x=0 \Rightarrow y=0 \\ & \text{για } x=4 \Rightarrow y=2 \\ & = \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{1+x} \sqrt{x} \, dx = \int_0^2 y \sqrt{1+y^3} \cdot 2y \, dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{θέτουμε } u = 1 + y^3 \\ & \Rightarrow du = 3y^2 \, dy \Rightarrow y^2 \, dy = \frac{1}{3} du \\ & \text{για } y=0 \Rightarrow u=1 \\ & \text{για } y=2 \Rightarrow u=9 \\ & = 2 \int_0^2 y^2 \sqrt{1+y^3} \, dy = 2 \int_0^9 \frac{1}{3} \sqrt{u} \, du = \frac{2}{3} \int_0^9 u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{2}{3} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^9 = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{9} \left(\sqrt{9^3} - \sqrt{1^3} \right) = \frac{4}{9} \cdot 26 = \frac{104}{9}$$