

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{G} e^{\frac{x}{G}} \text{ και } f''(x) = \frac{1}{G^2} e^{\frac{x}{G}} > 0$$

Προφανώς $f''(x) > 0$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$

β) Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$, έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

Για να περνάει η παραπάνω εφαπτομένη από την αρχή των αξόνων θα πρέπει το σημείο $O(0,0)$, να ικανοποιεί την εξίσωση (1), δηλαδή θα πρέπει

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Rightarrow -e^{\frac{x_0}{G}} = \frac{1}{G} e^{\frac{x_0}{G}} (-x_0) \Rightarrow x_0 = G$$

Οπότε η εξίσωση (1) για $x_0 = G$ γίνεται

$$y - f(G) = f'(G)(x - G) \xRightarrow[f'(G) = \frac{e}{G}]{f(G) = e} y - e = \frac{e}{G}(x - G) \Rightarrow y = \frac{ex}{G}$$

γ) Επειδή η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$, θα είναι μεγαλύτερη από κάθε εφαπτόμενη της, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα θα είναι μεγαλύτερη και από την εφαπτόμενη του ερωτήματος β), δηλαδή θα ισχύει

$$f(x) \geq \frac{ex}{G} \Rightarrow e^{\frac{x}{G}} \geq \frac{ex}{G} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δ) Η σχέση του ερωτήματος γ) για $x = \alpha_1$ γίνεται $e^{\frac{\alpha_1}{G}} \geq \frac{e\alpha_1}{G} \quad (2)$

$$\text{για } x = \alpha_2 \text{ γίνεται } e^{\frac{\alpha_2}{G}} \geq \frac{e\alpha_2}{G} \quad (3)$$

$$\text{για } x = \alpha_3 \text{ γίνεται } e^{\frac{\alpha_3}{G}} \geq \frac{e\alpha_3}{G} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2), (3) και (4) (όλα τα μέλη είναι θετικά) έχουμε

$$\begin{aligned} e^{\frac{\alpha_1}{G}} \cdot e^{\frac{\alpha_2}{G}} \cdot e^{\frac{\alpha_3}{G}} &\geq \frac{e\alpha_1}{G} \cdot \frac{e\alpha_2}{G} \cdot \frac{e\alpha_3}{G} \Rightarrow e^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{G}} \geq \frac{e^3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{G^3} \xRightarrow{G = \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}} \\ &\Rightarrow e^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}}} \geq \frac{e^3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \Rightarrow e^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}}} \geq e^3 \Rightarrow \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}} \geq 3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$$