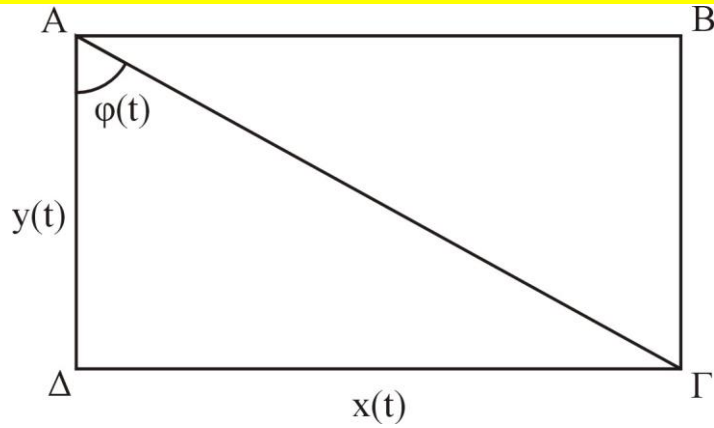


ΘΕΜΑ Δ 36.51

- α) Αν Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα είναι (όλα τα μήκη είναι σε m, οι χρόνοι σε s και οι παράγωγοι σε m/s)



$$x(0) = 7 \quad (1)$$

$$y(0) = 1 \quad (2)$$

$$x(t) - y(t) = 6 - 3t \quad (3)$$

$$\text{και } \Pi'(t) = 8e^{2t} - 2$$

$$\text{Όμως } \Pi(t) = 2x(t) + 2y(t)$$

οπότε

$$\Pi'(t) = 8e^{2t} - 2 \Rightarrow 2x'(t) + 2y'(t) = 8e^{2t} - 2 \Rightarrow x'(t) + y'(t) = 4e^{2t} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x(t) + y(t)]' = (2e^{2t} - t)' \Rightarrow x(t) + y(t) = 2e^{2t} - t + c \quad (4)$$

$$(4) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0 \text{ και } y=0} x(0) + y(0) = 2e^{2 \cdot 0} - 0 + c \xrightarrow{(1), (2)} 7 + 1 = 2 + c \Rightarrow c = 6 \quad (5)$$

$$(4) \xrightarrow{(5)} x(t) + y(t) = 2e^{2t} - t + 6 \quad (6)$$

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (3) και (6)

$$\begin{cases} x(t) - y(t) = 6 - 3t \\ x(t) + y(t) = 2e^{2t} - t + 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} 2x(t) = 2e^{2t} - 4t + 12 \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{2t} - 2t + 6 \quad \text{και από την (3)} \Rightarrow y(t) = e^{2t} + t$$

- β) Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο. Τότε θα ισχύει $x(t_0) = y(t_0)$. Οπότε

$$(3) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } t \text{ το } t_0} x(t_0) - y(t_0) = 6 - 3t_0 \xrightarrow{x(t_0)=y(t_0)} 0 = 6 - 3t_0 \Rightarrow t_0 = 2$$

Άρα την χρονική στιγμή $t_0 = 2$, που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο θα είναι

$$x(t) = e^{2t} - 2t + 6 \xrightarrow{\text{θέτουμε } t=2} x(2) = e^{2 \cdot 2} - 2 \cdot 2 + 6 \Rightarrow \underline{x(2) = e^4 + 2} \quad (7)$$

$$x(t) = e^{2t} - 2t + 6 \Rightarrow x'(t) = 2e^{2t} - 2 \xrightarrow{\text{θέτουμε } t=2} x'(2) = 2e^{2 \cdot 2} - 2 \Rightarrow \underline{x'(2) = 2e^4 - 2} \quad (8)$$

$$y(t) = e^{2t} + t \xRightarrow{\text{θέτουμε } t=2} y(2) = e^{2 \cdot 2} + 2 \Rightarrow \underline{y(2) = e^4 + 2} \quad (9)$$

$$y(t) = e^{2t} + t \Rightarrow y'(t) = 2e^{2t} + 1 \xRightarrow{\text{θέτουμε } t=2} y'(2) = 2e^{2 \cdot 2} + 1 \Rightarrow \underline{y'(2) = 2e^4 + 1} \quad (10)$$

Οπότε

i) Αν $E(t)$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου συναρτήσει του χρόνου θα ισχύει

$$E(t) = x(t) \cdot y(t) \Rightarrow E'(t) = x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t) \xRightarrow{\text{θέτουμε } t=2}$$

$$\Rightarrow E'(2) = x'(2) \cdot y(2) + x(2) \cdot y'(2) \xRightarrow{(7), (8), (9), (10)}$$

$$\Rightarrow E'(2) = (2e^4 - 2) \cdot (e^4 + 2) + (e^4 + 2) \cdot (2e^4 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E'(2) = 4e^8 + 7e^4 - 2 \text{ m}^2 / \text{s}$$

ii) Έστω $\hat{\Delta} = \varphi(t)$. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Lambda\Delta\Gamma$ έχουμε

$$\varepsilon\varphi(t) = \frac{x(t)}{y(t)} \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \frac{1}{\sin^2 \varphi(t)} \varphi'(t) = \frac{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}{y^2(t)} \Rightarrow$$

$$\varphi'(t) = \frac{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}{y^2(t)} \sin^2 \varphi(t) \xRightarrow{\text{θέτουμε } t=2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(2) = \frac{x'(2)y(2) - x(2)y'(2)}{y^2(2)} \sin^2 \varphi(2) \quad (11)$$

Ακόμη επειδή για $t = 2$ το $\Lambda\Delta\Gamma$ είναι τετράγωνο θα είναι

$$\sin \varphi(2) = \sin 45^\circ \Rightarrow \sin \varphi(2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (13)$$

Άρα

$$(11) \xRightarrow{(7), (8), (9), (10), (13)} \varphi'(2) = \frac{(2e^4 - 2)(e^4 + 2) - (e^4 + 2)(2e^4 + 1)}{(e^4 + 2)^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \varphi'(2) = -\frac{3}{4 + 2e^4} \text{ rad} / \text{s}$$

γ) Η συνάρτηση $y(t) = e^{2t} + t$

είναι συνεχής στο διάστημα ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = e^{2 \cdot 0} + 0 = 1 \\ y(1) = e^{2 \cdot 1} + 1 = e^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y(0) < 5 < y(1)$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $t_0 \in (0, 1)$ τέτοιο

ώστε $y(t_0) = 5$

δ) Είναι $y(t_0) = 5 \Rightarrow e^{2t_0} + t_0 = 5 \Rightarrow e^{2t_0} = 5 - t_0$ (1)

Επομένως την χρονική στιγμή t_0 είναι

$$x(t_0) = e^{2t_0} - 2t_0 + 6 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x(t_0) = 5 - t_0 - 2t_0 + 6 \Rightarrow x(t_0) = 11 - 3t_0$$

Οπότε την χρονική στιγμή t_0 το ορθογώνιο έχει εμβαδό

$$E(t) = x(t_0) \cdot y(t_0) \stackrel{\substack{x(t_0)=11-3t_0 \\ y(t_0)=5}}{\Rightarrow} 5(11-3t_0) = 55 - 15t_0$$