

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.50

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = 2 - f(x)$

Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(διότι $f(x) \neq 2 \Rightarrow 2 - f(x) \neq 0 \Rightarrow h(x) \neq 0$)

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \eta \ h \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R} \\ \text{Όμως } h(0) = 2 - f(0) \stackrel{f(0)=1}{=} h(0) = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$f'(x) = (2 - f(x))e^{f(x)} \Rightarrow f'(x) = h(x)e^{f(x)} \stackrel{\substack{h(x) > 0 \\ e^{f(x)} > 0}}{\Rightarrow} \boxed{f'(x) > 0} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και} \\ \text{άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}$$

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και

$$f'(x) = (2 - f(x))e^{f(x)} \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f''(x) = -f'(x)e^{f(x)} + (2 - f(x))e^{f(x)}f'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow f''(x) = f'(x)e^{f(x)}(-1 + 2 - f(x)) \Rightarrow \boxed{f''(x) = f'(x)e^{f(x)}(1 - f(x))}$$

Έχουμε ότι

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (από το προηγούμενο ερώτημα

$e^{f(x)} > 0$ (προφανές)

και

$$\boxed{\text{αν } x < 0} \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) < f(0) \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow} f(x) < 1 \Rightarrow \boxed{1 - f(x) > 0}$$

$$\boxed{\text{αν } x > 0} \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow} f(x) > 1 \Rightarrow \boxed{1 - f(x) < 0}$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$\emptyset$	$-$	
$f(x)$			σημείο καμπής		

Δηλαδή η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$
και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(0, f(0))$ δηλαδή στο $(0, 1)$

γ) Για κάθε $x \in f(\mathbb{R})$ είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2 - f(x))e^{f(x)} \Rightarrow \\ f'(f^{-1}(x)) &= (2 - f(f^{-1}(x)))e^{f(f^{-1}(x))} \Rightarrow \\ f(f^{-1}(x)) &= x \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2 - f(f^{-1}(x)))e^{f(f^{-1}(x))} \cdot (f^{-1}(x))' &= 1 \Rightarrow (2 - x)e^x \cdot (f^{-1}(x))' = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$f(x) \neq 2 \Rightarrow 2 \notin f(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \boxed{\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{(2-x)e^x}}$$

- δ) Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη -1 θα είναι $f(-1)=0$.

Ακόμη

$$f'(x) = (2 - f(x))e^{f(x)} \xRightarrow{e^{f(x)} \neq 0} \frac{f'(x)}{e^{f(x)}} = 2 - f(x) \Rightarrow f'(x)e^{-f(x)} = 2 - f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 - f'(x)e^{-f(x)}$$

Οπότε

$$\int_{-1}^0 f(x) dx \stackrel{f(x)=2-f'(x)e^{-f(x)}}{=} \int_{-1}^0 [2 - f'(x)e^{-f(x)}] dx = \int_{-1}^0 2 dx + \int_{-1}^0 -f'(x)e^{-f(x)} dx =$$

$$= 2(0+1) + \int_{-1}^0 (e^{-f(x)})' dx = 2 + [e^{-f(x)}]_{-1}^0 = 2 + e^{-f(0)} - e^{-f(-1)} \stackrel{f(0)=1}{f(-1)=0} = 2 + e^{-1} - e^0 =$$

$$= 2 + \frac{1}{e} - 1 = 1 + \frac{1}{e}$$