

ΘΕΜΑ Β 36.5

- α) Η g είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αφού και η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[e^x (f(x) - x + 1) \right]' = e^x (f(x) - x + 1) + e^x (f'(x) - 1) = \\ &= e^x (f(x) + f'(x) - x) \stackrel{f'(x) = -f(x) + x}{=} 0 \end{aligned}$$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

- β) Η g είναι σταθερή, άρα $g(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Για } x=0: c = g(0) \Rightarrow c = e^0 (f(c) - 0 + 1) \stackrel{f(c)=c}{\Rightarrow} c = 1$$

$$\text{Άρα } e^x (f(x) - x + 1) = 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) - x + 1 = e^{-x} \Rightarrow f(x) = e^{-x} + x - 1$$

- γ) Γνωρίζουμε ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$)

θέτουμε όπου x το $-x$ και έχουμε $e^{-x} \geq -x + 1$

Άρα $e^{-x} + x - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$)

- δ) Από το προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x_0 = 0$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^1 |f(x)| dx \stackrel{f(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x)}{=} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^{-x} + x - 1) dx = \\ &= \int_0^1 e^{-x} dx + \int_0^1 x dx - \int_0^1 1 dx = \left[-e^{-x} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - [x]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \end{aligned}$$