

α) Θέτουμε $g(x) = x^2 f'(x)$ και $h(x) = xe^x - e^x$. Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} g'(x) &= 2xf'(x) + x^2 f''(x) \\ h'(x) &= e^x + xe^x - e^x = xe^x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\overset{x^2 f''(x) + 2xf'(x) = xe^x}{\Rightarrow} \\ &g'(x) = h'(x) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = h(x) + c \Rightarrow x^2 f'(x) = xe^x - e^x + c \quad (1), \quad c: \text{σταθερά}$$

$$\text{Όμως } (1) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1} 1^2 f'(1) = 1 \cdot e^1 - e^1 + c \xrightarrow{f'(1)=0} c = 0 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1) \xrightarrow{(2)} x^2 f'(x) = xe^x - e^x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

β) Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} x^2 f'(x) &= xe^x - e^x \Rightarrow f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} \\ \left(\frac{e^x}{x}\right)' &= \frac{xe^x - e^x}{x^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{x} + c \quad (3), \quad c: \text{σταθερά}$$

$$\text{Όμως } (3) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1} f(1) = \frac{e^1}{1} + c \xrightarrow{f(1)=e} c = 0 \quad (4)$$

$$\text{Οπότε } (3) \xrightarrow{(4)} f(x) = \frac{e^x}{x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$. Άρα

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

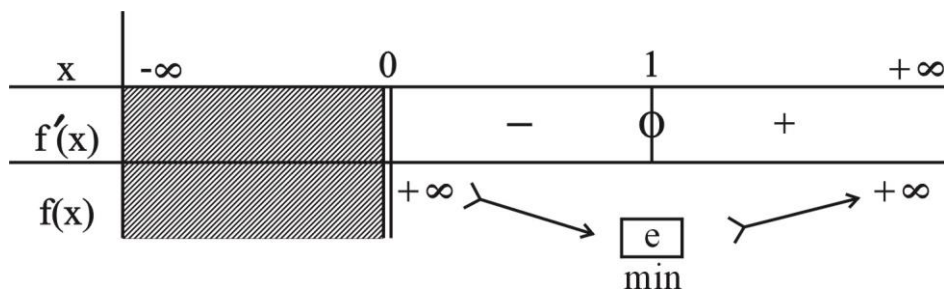
Ακόμη

$$f(1) = \frac{e^1}{1} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f , στα άκρα του πεδίου ορισμού φαίνονται στον παρακάτω πίνακα



Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$ θα

$$\text{είναι } f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [e, +\infty)$$

Ομοίως, επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$A_2 = [1, +\infty) \text{ θα είναι } f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [e, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = [e, +\infty)$

δ) Από το γ) ερώτημα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} f(x) \leq e &\Rightarrow \frac{e^x}{x} \geq e \\ f(y) \leq e &\Rightarrow \frac{e^y}{y} \geq e \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη} \\ &\Rightarrow \frac{e^x}{x} \cdot \frac{e^y}{y} \geq e^2 \Rightarrow \frac{e^{x+y}}{xy} \geq e^2 \end{aligned} \xrightarrow{xyz=1 \Rightarrow xy=\frac{1}{z}} \\
 &\Rightarrow \frac{e^{x+y}}{\frac{1}{z}} \geq e^2 \Rightarrow \\
 &\quad \quad \quad ze^{x+y} \geq e^2 \quad (5)
 \end{aligned}$$

Ομοίως προκύπτει ότι $xe^{y+z} \geq e^2$ (6) και $ye^{x+z} \geq e^2$ (7)

Προσθέτουμε τις σχέσεις (5), (6) και (7) κατά μέλη και έχουμε

$$xe^{y+z} + ye^{z+x} + ze^{x+y} \geq 3e^2$$