

ΘΕΜΑ Δ 36.48

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x \Rightarrow f'(x) = (1+x-1)e^x \Rightarrow f'(x) = xe^x$$

$$\text{Η } f' \text{ μηδενίζεται στο } x_0 = 0 \text{ και } f(0) = (0-1)e^0 - 1 = -2$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^x - 1] = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x - 1] = -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{e^{-x}} \right) \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \\ &= -1 + \frac{1}{-\infty} = -1 \end{aligned}$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f καθώς και τα όρια της στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	-2 τε	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [-2, -1)$$

στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-2, +\infty)$$

- β) Έχουμε ισοδύναμα

$$x = (\lambda + 1)e^{-x} + 1 \Leftrightarrow x - 1 = (\lambda + 1)e^{-x} \Leftrightarrow (x - 1)e^x = \lambda + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)e^x - 1 = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$$

Οπότε με βάση τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος

- αν $\lambda < -2$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει καμία ρίζα
- αν $\lambda = -2$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα και μάλιστα την $x_0 = 0$
- αν $-2 < \lambda < -1$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες (μία ακριβώς στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και μία ακριβώς στο διάστημα $[0, +\infty)$)
- αν $\lambda \geq -1$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα (στο διάστημα $[0, +\infty)$)

- γ) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= (1-1)e^1 - 1 = -1 < 0 \\ f(2) &= (2-1)e^2 - 1 = e^2 - 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{f(x_0) = 0}$$

Ακόμη

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow (x_0 - 1)e^{x_0} - 1 = 0 \Rightarrow (x_0 - 1)e^{x_0} = 1 \Rightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0 - 1} \quad (1)$$

«Ελενάρουμε» την σχέση (1) και έχουμε

$$(1) \Rightarrow \ln e^{x_0} = \ln \frac{1}{x_0 - 1} \Rightarrow x_0 = \ln 1 - \ln(x_0 - 1) \Rightarrow x_0 + \ln(x_0 - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{g(x_0) = 0}$$

Οπότε οι γραφικές παραστάσεις την f και g τέμνονται στο σημείο $A(x_0, 0)$

Μένει να δείξουμε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο σημείο $A(x_0, 0)$, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης άρα αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x_0) = g'(x_0)$

Πράγματι έχουμε ισοδύναμα

$$f'(x_0) = g'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} f'(x) &= xe^x \\ g'(x) &= 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 e^{x_0} = \frac{x_0}{x_0 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad e^{x_0} = \frac{1}{x_0 - 1} \quad \text{που ισχύει λόγω}$$

της (1)

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = (x-2)e^x - x + 3$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = e^x + (x-2)e^x - 1 = (1+x-2)e^x - 1 = (x-1)e^x - 1 = f(x)$$

Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε δει ότι

- για $x \leq 0$ είναι $f(x) < 0$
- η f μηδενίζεται στο $x_0 \in (1, 2)$
- για $0 < x < x_0 \xrightarrow{f'} \Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$
- για $x > x_0 \xrightarrow{f'} \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$

x	$-\infty$	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	-1	-2	0	$+\infty$

τε

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-2)e^x - x + 3] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-2}{e^{-x}} - x + 3 \right] =$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} &\stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \\ &= 0 - (-\infty) + 3 = +\infty \end{aligned}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-2)e^x - x + 3] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[(x-2) - \frac{x}{e^x} + 3 \right] =$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} &\stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[(x-2) - \frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \right] = (+\infty)(+\infty - 2 + 0 + 0) = +\infty \end{aligned}$$

Με βάση όλα τα παραπάνω έχουμε τον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$h(x_0)$ ολικό ελάχιστο	$+\infty$

Απομένει να δούμε αν το $h(x_0)$ είναι θετικό ή αρνητικό

(Αν δοκιμάσουμε το

$$h(x_0) = (x_0 - 2)e^{x_0} - x_0 + 3 \stackrel{(1) \Rightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0 - 1}}{=} \frac{x_0 - 2}{x_0 - 1} - x_0 + 3 = \frac{x_0 - 2 - x_0^2 + x_0 + 3x_0 - 3}{x_0 - 1} = \frac{-x_0^2 + 5x_0 - 5}{x_0 - 1} = \frac{-x_0^2 + 5(x_0 - 1)}{x_0 - 1} \quad \text{δεν βγαίνει άκρη)}$$

Όμως

$$1 < x_0 \stackrel{h' \searrow}{\Rightarrow} h(x_0) < h(1) \Rightarrow h(x_0) < (1 - 2)e^1 - 1 + 3 \Rightarrow h(x_0) < -e + 2 \stackrel{-e + 2 < 0}{\Rightarrow} h(x_0) < 0$$

Άρα τελικά η h έχει ακριβώς δύο ρίζες (μία ακριβώς στο $(-\infty, 0)$ και μία ακριβώς στο $(0, +\infty)$)