

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.47

α) i) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = \ln x - \frac{x}{e^2} - 1$

Παρατηρούμε ότι $g(e^2) = \ln e^2 - \frac{e^2}{e^2} - 1 = 0$ άρα το e^2 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{x}{e^2} + 1$$

Ακόμη η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 - x}{xe^2}$$

Τα πρόσημα της g' , η μονοτονία και τα ακρότητα της g , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0		e^2		$+\infty$
$g'(x)$			+	0	-	
$g(x)$				0 max		

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η g έχει ρίζα μόνο το e^2

ii) Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} θα είναι συνεχής και στο $x_0 = a$, άρα θα

$$\text{ισχύει } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{x}{e^2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow a^+} (\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{e^2} + 1 = \ln a \stackrel{\text{Α. ερώτημα}}{\Rightarrow} a = e^2$$

β) Επειδή $a = e^2$, θα είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^2} + 1, & \text{αν } x \leq e^2 \\ \ln x, & \text{αν } x > e^2 \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, e^2)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων

με $f_1'(x) = \frac{1}{e^2}$ και στο διάστημα $(e^2, +\infty)$ με $f_2'(x) = \frac{1}{x}$

Μένει να αποδειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη και στο e^2

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow e^2^-} \frac{f(x) - f(e^2)}{x - e^2} = \lim_{x \rightarrow e^2^-} \frac{\frac{x}{e^2} + 1 - 2}{x - e^2} = \lim_{x \rightarrow e^2^-} \frac{\frac{x}{e^2} - 1}{x - e^2} = \lim_{x \rightarrow e^2^-} \frac{\cancel{x} - e^2}{\cancel{x} - e^2} = \frac{1}{e^2}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow e^2^+} \frac{f(x) - f(e^2)}{x - e^2} = \lim_{x \rightarrow e^2^+} \frac{\ln x - 2}{x - e^2} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow e^2^+} \frac{\frac{x}{e^2} - 1}{x - e^2} = \lim_{x \rightarrow e^2^+} \frac{\cancel{x} - e^2}{\cancel{x} - e^2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^2^-} \frac{f(x) - f(e^2)}{x - e^2} = \lim_{x \rightarrow e^2^+} \frac{f(x) - f(e^2)}{x - e^2} = \frac{1}{e^2}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = e^2$, οπότε τελικά η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^2}, & \text{αν } x \leq e^2 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > e^2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{e^2} > 0$, για κάθε $x \leq e^2$ και $\frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > e^2$ άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1, άρα αντιστρέψιμη

γ) Επειδή η f είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) στο \mathbb{R} και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της θα είναι το $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^2} + 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της f θα είναι το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Ακόμη

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} , θα είναι το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το \mathbb{R}

Για να βρούμε την f^{-1} θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x . Έτσι έχουμε

αν $x \leq e^2$ τότε

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{e^2} + 1 \Rightarrow x = e^2 y - e^2$$

Άρα για κάθε $x \in f\left(\left(-\infty, e^2\right]\right) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(e^2)\right) = (-\infty, 2]$ είναι

$$f^{-1}(x) = e^2 x - e^2$$

αν $x > e^2$ τότε

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln x \Rightarrow x = e^y$$

Άρα για κάθε $x \in f\left(\left[e^2, +\infty\right)\right) = \left[f(e^2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = [2, +\infty)$ είναι

$$f^{-1}(x) = e^x$$

Άρα τελικά είναι

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} e^2 x - e^2, & \text{αν } x \leq 2 \\ e^x, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

δ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^3 |f^{-1}(x)| dx = \int_0^2 |f^{-1}(x)| dx + \int_2^3 |f^{-1}(x)| dx =$$

$$= \int_0^2 |e^2 x - e^2| dx + \int_2^3 |e^x| dx = e^2 \int_0^2 |x-1| dx + \int_2^3 |e^x| dx \stackrel{x-1>0 \Leftrightarrow x>1}{e^x>0} =$$

$$= e^2 \int_0^1 |x-1| dx + e^2 \int_1^2 |x-1| dx + \int_2^3 e^x dx =$$

$$= e^2 \int_0^1 (-x+1) dx + e^2 \int_1^2 (x-1) dx + \int_2^3 e^x dx =$$

$$= e^2 \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + e^2 \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 + [e^x]_2^3 =$$

$$= e^2 \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + e^2 \left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 \right) + e^3 - e^2 = e^3$$