

ΘΕΜΑ Γ 36.46

- α) Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$$

Και επειδή η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχει σύνολο τιμών

το διάστημα $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = (-\infty, +\infty)$, δηλαδή το $\mathbb{R}$

- β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Τότε έχουμε

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \quad \overset{f(g(x)) = x^5 + x + 1 + g(x)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x_1^5 + x_1 + 1 + g(x_1) = x_2^5 + x_2 + 1 + g(x_2) \quad \overset{g(x_1) = g(x_2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x_1^5 + x_1 + 1 = x_2^5 + x_2 + 1 \quad \overset{\varphi(x) = x^5 + x + 1}{\Rightarrow} \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \quad \overset{\varphi: 1-1}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα η g είναι 1-1

- γ) Επειδή η συνάρτηση $\varphi(x) = x^5 + x + 1$, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, θα υπάρχει

$\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho) = 0 \Rightarrow \rho^5 + \rho + 1 = 0$ (1) Οπότε

$$f(g(x)) = x^5 + x + 1 + g(x) \quad \overset{\text{θέτουμε } x=\rho}{\Rightarrow} f(g(\rho)) = \rho^5 + \rho + 1 + g(\rho)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} f(g(\rho)) = g(\rho) \quad (2)$$

Άρα αν θέσουμε $x_0 = g(\rho)$ από την (2) έχουμε $f(x_0) = x_0$

- δ) Έστω ότι υπάρχει εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της g που να είναι

παράλληλη στον άξονα $x'x$, έστω στο σημείο της με τετμημένη x_1 . Τότε θα είναι $g'(x_1) = 0$

Όμως τότε

$$f(g(x)) = x^5 + x + 1 + g(x) \quad \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f'(g(x))g'(x) = 5x^4 + 1 + g'(x) \Rightarrow$$

$$\overset{\text{θέτουμε } x=x_1}{\Rightarrow} f'(g(x_1))g'(x_1) = 5x_1^4 + 1 + g'(x_1) \quad \overset{g'(x_1)=0}{\Rightarrow} 5x_1^4 + 1 = 0 \quad \underline{\text{άτοπο}}$$

Άρα δεν υπάρχει εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της g που να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$