

- α) i) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $4x^2 + 1 > 0$, η f θα έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 2 + \frac{\cancel{8}x}{\cancel{2}\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2\sqrt{4x^2+1} + 4x}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2(\sqrt{4x^2+1} + 2x)}{\sqrt{4x^2+1}}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) > 0$

Όμως

$$f'(x) > 0 \stackrel{\sqrt{4x^2+1} > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{4x^2+1} + 2x > 0$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Αν $x \geq 0$ τότε προφανώς $\sqrt{4x^2+1} + 2x > 0$

Αν $x < 0$ τότε

$$\sqrt{4x^2+1} + 2x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} > -2x \stackrel{-2x > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{4x^2+1}^2 > (-2x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4x^2} + 1 > \cancel{4x^2} \Leftrightarrow 1 > 0 \text{ που ισχύει}$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

- ii) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right)$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + \sqrt{4x^2+1})(2x - \sqrt{4x^2+1})}{2x - \sqrt{4x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2+1)}{2x - |x|\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} - 1}{2x + x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x\left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{-1}{(-\infty)(2+2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \sqrt{4x^2+1}) \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right) = (+\infty)(2 + \sqrt{4+0}) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{A}) = (0, +\infty)$

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $(0, +\infty)$

Για να βρούμε την αντίστροφη της f , θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x + \sqrt{4x^2 + 1} \Leftrightarrow y - 2x = \sqrt{4x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - 2x)^2 = \sqrt{4x^2 + 1}^2 \Leftrightarrow y^2 - 2yx + \cancel{4x^2} = \cancel{4x^2} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2yx = y^2 - 1 \stackrel{y \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{y^2 - 1}{2y}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\gamma) \quad f'(x) = f(x)g(x) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \stackrel{f'(x) = \frac{2(\sqrt{4x^2+1}+2x)}{\sqrt{4x^2+1}}}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x) = 2x + \sqrt{4x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{\cancel{2(\sqrt{4x^2+1}+2x)}}{\cancel{2x + \sqrt{4x^2+1}}} \Leftrightarrow g(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\delta) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} dx \stackrel{g(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}}{=} \int_0^1 \frac{g(x)}{2} dx \stackrel{g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} [\ln f(x)]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} [\ln f(1) - \ln f(0)] \stackrel{\substack{f(1)=2 \cdot 1 + \sqrt{4 \cdot 1^2 + 1} = 2 + \sqrt{5} \\ f(0)=2 \cdot 0 + \sqrt{4 \cdot 0^2 + 1} = 1}}{=} \frac{1}{2} [\ln(2 + \sqrt{5}) - \ln 1] = \boxed{\frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{2}}$$