

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.44

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - (1 + \ln^2 x)}{x^2} = \frac{-\ln^2 x + 2 \ln x - 1}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} \leq 0 \quad (\text{με την}$$

ισότητα να ισχύει μόνο για $x = e$)

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και άρα έχει σύνολο τιμών το

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right)$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln^2 x}{x} \stackrel{\text{DLH } x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \stackrel{\text{DLH } x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln^2 x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Οπότε $f(A) = (0, +\infty)$

β) Έχουμε δει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ και άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη

ασύμπτωτη της C_f

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ δεν έχει άλλη κατακόρυφη ασύμπτωτη

Επίσης έχουμε δει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια

ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ δεν θα έχει άλλη οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη

γ) Είδαμε ότι $f'(x) = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2}$ και άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = -\frac{2(\ln x - 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 - (\ln x - 1)^2 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{2x(\ln x - 1)(1 - \ln x + 1)}{x^4} =$$

$$= \frac{2x(\ln x - 1)(\ln x - 2)}{x^4}$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0		e		e^2	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-	0	+
$f(x)$			↖	σημείο καμψής	↗	σημείο καμψής	↖

Δηλαδή παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $\left(e, f(e) = \frac{2}{e}\right)$ δηλαδή στο $\left(e, \frac{2}{e}\right)$

και

στο $\left(e^2, f(e^2) = \frac{5}{e^2}\right)$ δηλαδή στο $\left(e^2, \frac{5}{e^2}\right)$

δ) Η f είναι θετική οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\boxed{E} = \int_e^{e^2} |f(x)| dx \stackrel{f(x) > 0}{=} \int_e^{e^2} \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx \stackrel{\substack{\text{για } x=e \Rightarrow y=1 \\ \text{για } x=e^2 \Rightarrow y=2}}{=} \int_1^2 (1 + y^2) dy =$$

$$\left[y + \frac{y^3}{3} \right]_1^2 = \left(2 + \frac{8}{3} \right) - \left(1 + \frac{1}{3} \right) = 1 + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{10}{3}}$$