

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.43

α) Έχουμε

$$2f(xy) = f(x)f(y) + x^v y^v \xrightarrow{\text{θετούμε } x=1 \text{ και } y=1} 2f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) + 1^v \cdot 1^v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(1) = f^2(1) + 1 \Rightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \Rightarrow [f(1) - 1]^2 = 0 \Rightarrow f(1) - 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(1) = 1$$

β) Έστω ότι ο v είναι άρτιος. Τότε

$$2f(xy) = f(x)f(y) + x^v y^v \xrightarrow{\text{θετούμε } x=-1 \text{ και } y=1} 2f(-1 \cdot 1) = f(-1)f(1) + (-1)^v \cdot 1^v \Rightarrow \\ f(1)=1 \text{ και } (-1)^v=1 \text{ διότι ο } v \text{ είναι άρτιος} \Rightarrow 2f(-1) = f(-1) + 1 \Rightarrow f(-1) = 1 \text{ άτοπο διότι}$$

$$f(1) = 1 \text{ και η } f \text{ είναι 1-1.}$$

Άρα ο v δεν είναι άρτιος άρα είναι περιττός

$$\gamma) 2f(xy) = f(x)f(y) + x^v y^v \xrightarrow{\text{θετούμε } y=1} 2f(x) = f(x)f(1) + x^v \cdot 1^v \xrightarrow{f(1)=1}$$

$$\Rightarrow 2f(x) = f(x) + x^v \Rightarrow f(x) = x^v$$

δ) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το σύνολο

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \text{ και } x^v \in [1, 125]\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x^v \leq 125\} \stackrel{v \text{ περιττός}}{=} \\ = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[v]{1} \leq x \leq \sqrt[v]{125}\} = \\ = [1, \sqrt[v]{125}]$$

Επειδή όμως το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το διάστημα $[1, 5]$ συμπεραίνουμε ότι

$$\sqrt[v]{125} = 5 \Rightarrow 5^{\frac{3}{v}} = 5^1 \Rightarrow \frac{3}{v} = 1 \Rightarrow v = 3$$