

α) Αφού η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι και 1-1, άρα θα είναι αντιστρέψιμη

β) Επειδή η f διέρχεται από το σημείο $A(-6, 5)$, θα είναι $f(-6) = 5$ (1) και επειδή η f διέρχεται από το σημείο $B(2, 3)$, θα είναι $f(2) = 3$ (2)

Ακόμη είναι γνωστό ότι $f(f^{-1}(x)) = x$

Οπότε

$$f^{-1}\left(3 + f^{-1}(x^2 - 2x + 3)\right) = -6 \Rightarrow f\left[f^{-1}\left(3 + f^{-1}(x^2 - 2x + 3)\right)\right] = f(-6) \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$3 + f^{-1}(x^2 - 2x + 3) = 5 \Rightarrow f^{-1}(x^2 - 2x + 3) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left[f^{-1}(x^2 - 2x + 3)\right] = f(2) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x^2 - 2x + 3 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

γ) Παρατηρούμε ότι $-6 < 2$ και $f(-6) > f(2)$ οπότε αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ θα είναι υποχρεωτικά γνησίως φθίνουσα δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Οπότε

$$f^{-1}\left(f(x^2 - x) + 2\right) \leq -6 \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f\left[f^{-1}\left(f(x^2 - x) + 2\right)\right] \geq f(-6)$$

$$\Rightarrow f(x^2 - x) + 2 \geq 5 \Rightarrow f(x^2 - x) \geq 3 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(x^2 - x) \geq f(2) \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} x^2 - x \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x \leq 2 \Rightarrow x \in [-1, 2]$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^3 + 2x^2 - \eta\mu^3 x + 1}{x^2 - 2x \ln x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{3}} \left(f(1) + \frac{2}{x} - \frac{\eta\mu^3 x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^{\cancel{2}} \left(1 - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1) + \frac{2}{x} - \frac{\eta\mu^3 x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x^2}} = (+\infty) \cdot \frac{f(1) + 0 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = (+\infty) \cdot f(1) = +\infty$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \stackrel{DLH}{=} 0$$

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \eta\mu^3 x \leq 1 & \stackrel{\substack{\text{όταν } x \rightarrow +\infty \\ \text{είναι } x > 0}}{\Rightarrow} -\frac{1}{x^3} \leq \frac{\eta\mu^3 x}{x^3} \leq \frac{1}{x^3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \stackrel{\substack{\text{κριτήριο} \\ \text{παρεμβολής}}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu^3 x}{x^3} = 0 \end{aligned}$$

$f(1) > 0$ διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και

$$1 < 2 \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f(1) > f(2) \Rightarrow f(1) > 3 \Rightarrow f(1) > 0$$