

ΘΕΜΑ Γ 36.41

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2$,

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2$$

Προφανώς $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Ακόμη

$$f(0) = 2^0 + 0 - 2 \cdot 0 - 1 = 0$$

$$f(1) = 2^1 + 1 - 2 - 1 = 0$$

Άρα οι $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ είναι ρίζες της f .

Έστω ότι η f έχει μία ακόμη ρίζα ξ και ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας $0 < \xi < 1$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[0, \xi]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \xi)$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(\xi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = f(\xi)$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi_1 \in (0, \xi)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[\xi, 1]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(\xi, 1)$

$$\left. \begin{array}{l} f(\xi) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\xi) = f(1)$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi_2 \in (\xi, 1)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Δηλαδή η $f'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες, άτοπο διότι η f είναι κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1

Οπότε η f έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$

β) Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 2^0 \cdot \ln 2 + 2 \cdot 0 - 2 = \ln 2 - 2 < \ln e - 2 = -1 < 0 \\ f'(1) = 2 \ln 2 + 2 - 2 = 2 \ln 2 > 0 \end{array} \right\} f'(0) \cdot f'(1) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$,

τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, το οποίο θα είναι και μοναδικό αφού η f' είναι 1-1.

Άρα υπάρχει μοναδικό σημείο $A(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (0, 1)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

γ) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[0,1]$

$f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,1)$

Παρατηρούμε ότι :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \sqrt{2} - \frac{7}{4} < 0, \text{ αφού}$$

$$\sqrt{2} < \frac{7}{4} \Leftrightarrow \sqrt{2}^2 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 2 < \frac{49}{16} \text{ που ισχύει}$$

Άρα αφού $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$

δ) Έστω $g(x) = F(x) + 1 - x - F(1)$, $x \in [0,1]$

Είναι $g(1) = F(1) + 1 - 1 - F(1) = 0$, άρα η $x=1$ είναι ρίζα

της εξίσωσης $f(x) + 1 = x + F(1)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

$$g'(x) = F'(x) - 1 \stackrel{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow} g'(x) = f(x) - 1 < 0, \text{ αφού } f(x) < 0$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα και $1-1$ στο $(0,1]$. Οπότε η εξίσωση

$g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1]$, την $x=1$.