

- α) Έστω $g(x) = \frac{f(x)-2}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, παραγωγίσιμη αφού η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$

$$g(x) = \frac{f(x)-2}{x-2} \Rightarrow g(x)(x-2) = f(x)-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x)(x-2) + 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(x-2) + 2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \cdot 0 + 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

Ακόμα η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, άρα $f(2) = 2$

Τέλος έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 2 \Rightarrow f'(2) = 2$$

- β) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[0, 2]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(2) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = f(2)$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = 0$, δηλαδή υπάρχει σημείο $(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

- γ) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης f στο $(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow y = f(\xi)$$

Η f είναι κυρτή, άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη αυτή, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- δ) $F'(x) = f(x) \geq f(\xi) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Συνεπώς με $0 < 1$ έχουμε $F(0) < F(1)$

$$\text{Έστω } h(x) = F(x) - x^2 + 2x - F(1)$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = F(0) - F(1) < 0 \\ h(1) = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) \cdot h(1) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$$h(x) = 0 \Rightarrow F(x) - x^2 = F(1) - 2x \text{ έχει μία τουλάχιστον ρίζα}$$

στο διάστημα $(0, 1)$