

ΘΕΜΑ Β 36.4

- α) Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολωνυμική
 Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πολωνυμική

Ελέγχουμε την συνέχεια στο $x_0 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 1) = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\bullet f(0) = -0^2 + 1 = 1$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

- β) Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Ελέγχουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ ως πολωνυμική

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ ως πολωνυμική

Στο $x_0 = 0$ έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1) = -1$$

Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ δεν υπάρχει άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, και οι υποθέσεις του

Θεωρήματος Μέσης Τιμής δεν ικανοποιούνται στο $[-1, 1]$.

- γ) Έστω $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία εφάπτεται στο $(x_0, f(x_0))$ και διέρχεται από το

$\left(0, \frac{5}{4}\right)$. Θα πρέπει το $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ να ικανοποιεί την εξίσωση της εφαπτομένης. Άρα

$$\frac{5}{4} - f(x_0) = f'(x_0)(-x_0)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

i) $x_0 \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x_0) = -x_0^2 + 1, f'(x_0) = -2x_0$

$$\text{Άρα } \frac{5}{4} - (-x_0^2 + 1) = 2x_0^2 \Rightarrow \frac{5}{4} - 1 = x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{δεκτό αφού } x_0 \in (-\infty, 0)$$

$$\text{Για } x_0 = -\frac{1}{2}, f(x_0) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \quad \text{και } f'(x_0) = 1$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$y - \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = x + \frac{5}{4}$$

$$\text{ii) } x_0 \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x_0) = -x_0 + 1, f'(x_0) = -1$$

$$\text{Άρα } \frac{5}{4} - (-x_0 + 1) = -(-x_0) \Rightarrow \frac{5}{4} + x_0 - 1 = x_0 \Rightarrow \frac{1}{4} = 0 \quad \text{άτοπο}$$

iii) $x_0 = 0$ άτοπο αφού η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της f η οποία διέρχεται από το σημείο

$$A\left(0, \frac{5}{4}\right) \text{ είναι η } \varepsilon : y = x + \frac{5}{4}$$

$$\delta) \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-x^2 + 1) dx + \int_0^1 (-x + 1) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{6}$$