

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.39

- α) Η f είναι συνεχής στα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής και στα $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Πράγματι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln x}{1}}{\frac{x}{x-1}} \quad \text{όπου} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1} \stackrel{-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \ln x}{1} = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + \ln x}{1} = 1$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_1 = 1$

Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

- β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και στο $(1, +\infty)$ με :

$$f'(x) = \frac{(1 + \ln x)(x-1) - x \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1 + x \ln x - \ln x - x \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1 - \ln x}{(x-1)^2} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$$

αφού $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα μόνο για $x=1$

Άρα είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

- γ) Για $x=1$ σχέση $f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = f(x)$ γίνεται $f(1) = f(1) + \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = f(1)$, που ισχύει

Για $0 < x \neq 1$ έχουμε $\frac{1}{x} > 0$, $\frac{1}{x} \neq 1$ και

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = \frac{\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} = \frac{\ln 1 - \ln x}{1-x} = \frac{\ln x}{x-1} = f(x)$$

Άρα για κάθε $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$

- δ) Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot e^{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot e^{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 \cdot 1 = 1$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y = \frac{1}{x} \\ \text{όταν } x \rightarrow +\infty \text{ } y \rightarrow 0^+}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{f(y)}} \stackrel{f: \text{συνεχής στο } [0, +\infty)}{=} \frac{1}{e^{f(0)}} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$