

# Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

## ΘΕΜΑ Γ 36.38

α) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε

$$2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \Rightarrow [x^2f(x)]' = [x^3 - f(x)]' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2f(x) = x^3 - f(x) + c \Rightarrow (x^2 + 1)f(x) = x^3 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3 + c}{x^2 + 1}$$

$$\text{Για } x=1, f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1+c}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c=0$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $f'(x) \geq 0$  με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για  $x=0$ . Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\mathbb{R}$

β) Η  $f$  είναι συνεχής, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο  $-\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^3 - 1}{x^2 + 1} = 0$$

Άρα η  $y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $-\infty$

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο  $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = 1 = \lambda$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-1}{x^2 + 1} \right) = 0$$

Άρα η  $y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$

$$\gamma) f\left(5(x^2 + 1)^3 - 8\right) \leq f\left(8(x^2 + 1)^2\right) \stackrel{f \nearrow \mathbb{R}}{\Rightarrow} 5(x^2 + 1)^3 - 8 \leq 8(x^2 + 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(x^2 + 1)^3 \leq 8(x^2 + 1)^2 + 8 \Rightarrow 5(x^2 + 1)^3 \leq 8\left[(x^2 + 1)^2 + 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2 + 1)^3}{(x^2 + 1)^2 + 1} \leq \frac{8}{5} \Rightarrow f(x^2 + 1) \leq f(2) \stackrel{f \nearrow \mathbb{R}}{\Rightarrow} x^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

$$\delta) \text{ Έστω } \kappa \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{f'(x)} - \kappa \right) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{f'(x)} - \kappa \right) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}} - \kappa \right) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{|x|}{x^2 + 1} \sqrt{x^2 + 3} - \kappa \right) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{|x|^2}{x^2 + 1} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - \kappa \right) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \sqrt{1 + 0} - \kappa = 5 \Rightarrow \kappa = -4$$