

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.37

α) $f'(x) = 2xe^{-x} - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f'(x) + f(x) = 2xe^{-x} \Rightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 2x \Rightarrow$
 $\Rightarrow [e^x f(x)]' = [x^2]' \Rightarrow e^x f(x) = x^2 + c \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) = x^2 e^{-x} + ce^{-x}$

Για $x=1$, $f(1) = e^{-1} \Rightarrow e^{-1} = 1 \cdot e^{-1} + c \cdot e^{-1} \Rightarrow c=0$

Άρα $f(x) = x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow (2x - x^2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x(2 - x)e^{-x} = 0 \Rightarrow$

με $f(0) = 0$ και $f(2) = 4e^{-2}$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία και τα ακρότατά της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Οπότε

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 0]$, άρα

$f(A_1) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$ όπου $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty$,

γιατί: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $e^x > 0$

Άρα $f(A_1) = [0, +\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [0, 2]$, άρα

$f(A_2) = [f(0), f(2)] = [0, 4e^{-2}]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3 = [2, +\infty)$, άρα:

$f(A_3) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(2)]$ όπου:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Άρα $f(A_3) = (0, 4e^{-2})$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [0, +\infty)$

γ) Αναζητούμε το πλήθος των ριζών της $x^2 = 2e^{x-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{2e^x}{e^2} \Rightarrow \frac{x^2}{e^x} = \frac{2}{e^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{e^2}$

Παρατηρούμε ότι:

• $\frac{2}{e^2} \in f(A_1)$ και η f γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1 στο A_1 ,

άρα η $f(x) = \frac{2}{e^2}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο A_1

- $\frac{2}{e^2} \in f(A_2)$ και η f γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 στο A_2 ,

άρα η $f(x) = \frac{2}{e^2}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο A_2

- $\frac{2}{e^2} \in f(A_3)$ και η f γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1 στο A_3 ,

άρα η $f(x) = \frac{2}{e^2}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο A_3

Συνολικά λοιπόν η $x^2 = 2e^{x-2}$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

δ) Είναι $f(-1) = \frac{(-1)^2}{e^{-1}} = e$ και $f'(-1) = -3e$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(-1, f(-1))$ είναι :

$$\varepsilon: y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow y - e = -3e(x + 1) \Rightarrow y = -3ex - 2e$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) > 0$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $-4x > 0 \xRightarrow{x^2+2>0} x^2 - 4x + 2 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ άρα η f είναι

κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και άρα η γραφική παράσταση της βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενη ευθεία $\varepsilon: y = -3ex - 2e$. Οπότε θα ισχύει

$$f(x) \geq -3ex - 2e \Rightarrow f(x) + 3ex + 2e \geq 0 \text{ για κάθε } x < 0$$