

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.36

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$g'(x) = g(x) - 2x - 3 \quad (1)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(0) = g(0)$ και $f'(0) = g'(0)$

$$\text{Πράγματι : } g(0) = \frac{1}{1-0^2} f(0) \Rightarrow g(0) = f(0)$$

Στην (1), για $x = 0$:

$$g'(0) = \frac{f'(0)(1-0) + 2 \cdot 0 \cdot f(0)}{(1-0^2)^2} \Rightarrow g'(0) = f'(0)$$

Άρα οι C_f , C_g έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ και κοινή εφαπτομένη σε αυτό.

β) Έχουμε $g(0) = f(0) = 3$

Θέτουμε

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = g(x) - 2x - 3$. Η h είναι παραγωγίσιμη

στο $(-1,1)$, με $h'(x) = g'(x) - 2$ (2)

Παρατηρούμε ότι $h(0) = g(0) - 2 \cdot 0 - 3 \stackrel{g(0)=3}{\Rightarrow} h(0) = 0$. Οπότε ισχύει

$$g(x) \geq 2x + 3 \Rightarrow g(x) - 2x - 3 \geq 0 \stackrel{\substack{h(x)=g(x)-2x-3 \\ h(0)=0}}{\Rightarrow} h(x) \geq h(0), \text{ για κάθε } x \in (-1,1).$$

Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα Fermat θα ισχύει $\boxed{h'(0) = 0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g'(0) - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{g'(0) = 2}$

Η γραφική παράσταση της C_g στο $A(0,3)$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y - 3 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 3$$

και όπως δείξαμε στο α), ταυτίζεται με την εφαπτομένη της C_f στο $A(0,3)$

γ) Η f είναι κυρτή, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα $f(x) \geq 2x + 3$ για κάθε $x \in (-1,1)$

Για κάθε $\alpha \in (0,1)$ το $(-\alpha, \alpha) \subseteq (-1, 1)$

$$\text{Άρα } \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx \geq \int_{-\alpha}^{\alpha} [2x + 3] dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx \geq [x^2 + 3x]_{-\alpha}^{\alpha} \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx \geq 6\alpha$$