

α) Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \eta\mu 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = \sqrt{0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Ακόμα η f είναι συνεχής στο $[-1, 0)$ ως ρίζα, και συνεχής στο $(0, \pi)$ ως τριγωνομετρική.

Άρα η f είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$

κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία μηδενισμού της παραγώγου καθώς και τα σημεία όπου η f' δεν ορίζεται.

Έχουμε

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ με $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}} \neq 0$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f'(x) = \sin x$

$$\text{Οπότε } f'(x) = 0 \xRightarrow{x \in (0, \pi)} x = \frac{\pi}{2} \text{ δεκτή}$$

Ελέγχουμε τώρα αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}}{\sqrt{-x} \cdot x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0 \end{aligned}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x_0 = 0$ και $x_1 = \frac{\pi}{2}$

β) Είναι $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και $f(\pi) = 0$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	0	-	
$f(x)$		1 τμ	0 τε	1 τε	0 τμ	

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$,

γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Η f παρουσιάζει στο $x_1 = -1$ μέγιστο το $f(-1) = 1$

Η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο το $f(0) = 0$

Η f παρουσιάζει στο $x_2 = \frac{\pi}{2}$ μέγιστο το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Η f παρουσιάζει στο $x_3 = \pi$ ελάχιστο το $f(\pi) = 0$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 \in (0, \pi)$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - \eta \mu x_0 = \sigma \nu x_0 (x - x_0)$$

Θέλουμε η ε να διέρχεται από το $M(0, 3)$, δηλαδή

$$3 - \eta \mu x_0 = -x_0 \sigma \nu x_0$$

$$\text{Έστω } g(x) = 3 - \eta \mu x + x \sigma \nu x, \quad x \in [0, \pi]$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = 3 \\ g(\pi) = 3 - \pi < 0 \end{array} \right\} g(0) \cdot g(\pi) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$

τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ και το ζητούμενο έπεται

δ) Όπως δείξαμε στο β) ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, \pi]$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{\pi} |f(x)| dx \stackrel{f(x) \geq 0}{=} \int_{-1}^{\pi} f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 \sqrt{-x} dx + \int_0^{\pi} \eta \mu x dx = \int_{-1}^0 (-x)^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^{\pi} \eta \mu x dx =$$

$$= \left[\frac{2(-x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{-1}^0 + [-\sigma \nu x]_0^{\pi} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$