Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.34

α) Για κάθε $x \in R$ ισχύει :

$$f'(x)f(x) = x \Rightarrow 2f'(x)f(x) = 2x \Rightarrow \left[f^2(x)\right]' = \left(x^2\right)' \Rightarrow f^2(x) = x^2 + c$$

Για $x = 0$ έχουμε $f^2(0) = 0 + c \overset{f(0)=1}{\Rightarrow} 1 = c$

Άρα $f^2(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in R$

Η f δεν μηδενίζεται διότι αν υπάρχει $x_o \in R$ με $f(x_o) = 0$, θα είναι

$f(x_o) = 0 \Rightarrow x_o^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_o^2 = -1$ άτοπο

Οπότε

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } R \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in R \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \eta\ f \text{ διατηρεί σταθερό} \\ \text{πρόσημο στο } R \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} f(x) > 0 \text{ , για κάθε } x \in R$$

Τέλος

$$f^2(x) = x^2 + 1 \Rightarrow |f(x)| = \sqrt{x^2+1} \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

β) $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{1}{x^2+1}} - \lambda x\right) =$$

$$\underset{x>0}{\overset{|x|=x}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \lambda\right)\right) = +\infty \cdot (1-\lambda)$$

Επομένως διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

- Αν $\lambda < 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = +\infty \cdot (1-\lambda) = +\infty$
- Αν $\lambda > 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = +\infty \cdot (1-\lambda) = -\infty$
- Αν $\lambda = 1$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$$= \frac{1}{(+\infty)\left(\sqrt{1+0} + 1\right)} = 0$$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in R$

Είναι $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ με $f(0)=1$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\boxed{1}$ ολικό ελάχιστο	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,0]$, άρα

$f(A_1)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$ όπου $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

Άρα $f(A_1)=[1,+\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[0\ ,\ +\infty)$, άρα

$f(A_2)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(R)=f(A_1)\cup f(A_2)=[1\ ,\ +\infty)$

δ) Μια προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x)=συνx$ είναι η $x=0$ διότι $f(0)=συν0=1$

Ακόμη όπως δείξαμε παραπάνω $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in R$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Ταυτόχρονα $συνx\leq 1$ για κάθε $x\in R$. Άρα η $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=συνx$