

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.33

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων

$$\begin{aligned} \text{συναρτήσεων με } f'(x) &= 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3} = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} = \frac{2(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^3} = \\ &= \frac{2(x-1)(x+1)(x^2 + 1)}{x^3} \end{aligned}$$

Ακόμη

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x-1)(x+1)(x^2 + 1) \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

$$\text{Είναι } f(-1) = f(1) = 2$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$						

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 1]$, άρα:

$$f(A_1) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right), \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\text{Οπότε: } f(A_1) = [2, +\infty).$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [-1, 0)$ άρα

$$f(A_2) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\text{Οπότε: } f(A_2) = [2, +\infty) \Rightarrow f(A_1) \cup f(A_2) = [2, +\infty)$$

$$\text{Άρα το } f(A_1) \cup f(A_2) = f((-\infty, 0)) = f((0, +\infty)) = [2, +\infty)$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι άρτια διότι για κάθε $x \neq 0$ είναι

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x)$$

Λόγω συμμετρίας λοιπόν το σύνολο των τιμών της f είναι

$$f((-\infty, 0)) \cup f((0, +\infty)) = f((0, +\infty)) = [2, +\infty)$$

β) Πρέπει $f(x) - \frac{3}{2} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq \frac{3}{2}$ που ισχύει για κάθε $x \neq 0$,

$$\text{καθώς } f(x) \geq 2 > \frac{3}{2} \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\gamma) f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2$$

Όπως αποδείξαμε στα α), β) είναι $f(x) - \frac{3}{2} > 0$ για κάθε $x \neq 0$, και

η f παρουσιάζει στο $x_1 = 1$ ελάχιστο το $f(x_1) = 2$

$$\text{Άρα έχουμε: } f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2 \Rightarrow f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} 2x^4 + 2 - 5x^2 = 0 \Rightarrow 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$$

$$\text{Θέτουμε } \omega = x^2 > 0 \quad 2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 \quad \omega_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{matrix} \nearrow \omega_1 = 2 \\ \searrow \omega_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Άρα

$$\omega = 2 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \quad \left| \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \right.$$

$$\Rightarrow x\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{2} \quad \left| \quad \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right.$$

δ) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$

$$\text{έχει εξίσωση } \varepsilon: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, τέτοιο ώστε

το

να ανήκει στην ε , δηλαδή :

$$\frac{5}{2} = f'(\xi)(0 - \xi) + f(\xi) \Rightarrow \frac{5}{2} - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (-\xi) \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi) - \frac{5}{2}}{\xi}$$

$$\text{Οπότε θέτουμε } h(x) = f'(x) - \frac{f(x) - \frac{5}{2}}{x}, \quad x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

(η f' είναι

$$\left. \begin{aligned} h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{5}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \stackrel{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{2}}{=} f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0 \\ \text{διότι } f'(x) &< 0 \text{ στο } (0, 1) \\ h(1) &= f'(1) - \frac{f(1) - \frac{5}{2}}{1} \stackrel{f(1) = 0}{=} -\left(2 - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \end{aligned} \right\} h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)h(1) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$,

$$\text{τέτοιο ώστε } h(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi) - \frac{5}{2}}{\xi}$$