

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.32

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στα $(-\infty, 1), (1, +\infty)$ ως πολυωνυμική.

Επειδή είναι παραγωγίσιμη (στο πεδίο ορισμού της), είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) και στο $x_0 = 1$

$$\text{Άρα } f(0) = 1 + \alpha = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 1 + \alpha \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-(x-1)^4 + \beta x \right) = \beta \end{aligned} \right\} 1 + \alpha = \beta \quad (1)$$

$$\text{Επίσης } \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - (1 + \alpha)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^4 + \beta x - (\alpha + 1)}{x - 1} =$$

$$\stackrel{\alpha+1=\beta}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^4 + \beta x - \beta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^4 + \beta(x-1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-(x-1)^3 + \beta \right) = \beta$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη πρέπει $\beta = 2$

$$\text{Άρα } \alpha = \beta - 1 = 1$$

$$\beta) \text{ Για } \alpha = 1 \text{ και } \beta = 2 \text{ είναι } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \geq 1 \\ -(x-1)^4 + 2x & , x < 1 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με $f'(x) = -4(x-1)^3 + 2$

$$\text{Για } x < 1 \text{ έχουμε: } x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow (x-1)^3 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-1)^3 > 0 \Rightarrow -4(x-1)^3 + 2 > 2 \Rightarrow f'(x) > 2 > 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $f'(x) = 2x > 0$ για κάθε $x > 1$.

$$\text{Ακόμη όπως είδαμε παραπάνω είναι } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \beta = 2 > 0$$

Οπότε είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Ακόμη επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-(x-1)^4 + 2x \right], \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2 \\ f(0) = -(0-1)^4 + \beta \cdot 0 = -1 \end{array} \right\} f(0) \cdot f(1) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$,

τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $-1 < 0$, επομένως το x_0 , αυτό είναι μοναδικό.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1)$ οπότε προφανώς είναι θετική

δ) Έστω ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, +\infty)$ τέτοιο ώστε:

$$f^2(\xi) + x_0 f(\xi) = 0 \Rightarrow f^2(\xi) = -x_0 f(\xi) \quad (1)$$

Είναι $x_0 > 0$ και $\xi > x_0 \xrightarrow{f'} f(\xi) > f(x_0) = 0$

Άρα $x_0 f(\xi) > 0 \Rightarrow -x_0 f(\xi) < 0 \xrightarrow{(1)} f^2(\xi) < 0$ άτοπο αφού: $f^2(\xi) \geq 0$

Άρα η εξίσωση $f^2(x) + x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$