Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.31

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με :

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{με } f(0)=1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\boxed{1}$ ολικό μέγιστο	$\searrow$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1=(-\infty,0]$ και συνεπώς ,

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right], \text{ όπου } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty \quad \text{Άρα } f(A_1)=(0,1]$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[0,+\infty)$, και συνεπώς ,

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\ ,\ f(0)\right], \text{ όπου } \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

Άρα $f(A_2)=(0\ ,\ 1]$

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(R)=f(A_1)\cup f(A_2)=(0,1]$

β) Από τον πίνακα του ερωτήματος α), η f παρουσιάζει στο $x_o=0$

ολικό μέγιστο το $f(0)=1$

Άρα $f(x)\ge f(0)$ για κάθε $x\in R$

$$\Rightarrow f(x)\ge 1>0 \overset{\substack{f\nearrow \\ \text{για}\, x>0}}{\Rightarrow} f(f(x))\ge f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f(x))\ge\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{για κάθε } x\in R$$

γ) $$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x} =$$

$$\underset{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}{\overset{x+1=y}{=}} \lim_{y\to 1}\frac{f(y)-f(1)}{y-1} = f'(1)=\frac{1}{\left(1^2+1\right)\sqrt{1^2+1}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

δ) Για κάθε $x\in R$, ισχύει $f(-x)=\dfrac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=f(x)$

άρα η f είναι άρτια. Οπότε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx = I_1+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$$

Για το I_1 εκτελούμε την αντικατάσταση $y=-x$

$$I_1=\int_{\alpha}^{0} f(-y)(-du) = \int_{0}^{\alpha} f(-y)dy \overset{f:\text{άρτια}}{=} \int_{0}^{\alpha} f(y)dy = \int_{0}^{\alpha} f(y)dx$$

Άρα $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$