

α) Έστω $g(x) = \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x}$, $2x \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ με :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5 \Rightarrow g(x) \eta\mu 2x = f(x) - e^{2x} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) \eta\mu 2x + e^{2x} - 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [g(x) \eta\mu 2x + e^{2x} - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu 2x) + \lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5 \cdot 0 + 1 - 1 = 0$$

Και επειδή η f είναι συνεχής, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Πράγματι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x) \eta\mu 2x + e^{2x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[g(x) \cdot \frac{\eta\mu 2x}{x} \right] + \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{2x} - 1}{x} \right]$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} \stackrel{2x=y}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2\eta\mu y}{y} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{2 \cdot 0}}{x - 0} = (e^{2x})' \Big|_{x \rightarrow 0} = 2 \cdot e^{2x} \Big|_{x \rightarrow 0} = 2$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 5 \cdot 2 + 2 = 12 \Rightarrow f'(0) = 12$$

γ) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο εφαπτομένων ευθειών είναι ίσοι

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\epsilon_1} = f'(0)$

Η εφαπτομένη της C_h στο $\beta(0, h(0))$, έχει εξίσωση $\lambda_{\epsilon_2} = h'(0)$

Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(0) = h'(0)$

Όμως

$$\boxed{h'(0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \cdot f'(0) = \boxed{f'(0)}$$

$$\delta) \quad \text{Έχουμε} \quad \frac{f(x)\ln(x^2 - x + 1) + 2}{x - 1} + 2x = f(x) + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)\ln(x^2 - x + 1) + 2 + 2x(x - 1) = (x - 1)f(x) - 5(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)\ln(x^2 - x + 1) + 2 + 2x(x - 1) - (x - 1)f(x) + 5(x - 1) = 0$$

Οπότε θέτουμε

$$h(x) = f(x)\ln(x^2 - x + 1) + 2 + 2x(x - 1) - (x - 1)f(x) + 5(x - 1)$$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= f(0)\ln(0^2 - 0 + 1) + 2 + 2 \cdot 0 \cdot (0 - 1) - (0 - 1)f(0) + 5(0 - 1) = \\ &\stackrel{f(0)=0}{=} 2 - 5 = -3 \\ f(1) &= f(1)\ln(1^2 - 1 + 1) + 2 + 2 \cdot 1 \cdot (1 - 1) - (1 - 1)f(0) + 5(1 - 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(0) \cdot h(1) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0$, άρα και η

$$\frac{f(x)\ln(x^2 - x + 1) + 2}{x - 1} + 2x = f(x) - 5, \text{ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα } (0, 1)$$