

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.3

- α) Η $g(x) = \frac{f'(x) + f(x)}{e^x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{[f'(x) + f(x)]' e^x - (e^x)' [f'(x) + f(x)]}{e^{2x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{f''(x)e^x + f'(x)e^x - e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{e^x (f''(x) - f(x))}{e^{2x}} \Rightarrow$$

$$\stackrel{f''(x)=f(x)}{\Rightarrow} g'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα η συνάρτηση } g \text{ είναι σταθερή.}$$

- β) Η g είναι σταθερή, άρα $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Για } x=0: g(0) = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{f'(0) + f(0)}{e^0} \Rightarrow$$

$$\stackrel{\substack{f(0)=1 \\ f'(0)=0}}{\Rightarrow} c = \frac{1+0}{1} = 1 \text{ επομένως } g(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x) + f(x)}{e^x} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f'(x) + f(x)] \cdot e^x = e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) [f(x) \cdot e^x]' = e^{2x} \Rightarrow [f(x) \cdot e^x] = \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' \Rightarrow f(x) \cdot e^x = \frac{e^{2x}}{2} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{c_1}{e^x}$$

$$\text{Για } x=0: f(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \delta) \int_0^1 2xf(x) dx &= \int_0^1 2x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx = \int_0^1 x(e^x - e^{-x}) dx = \int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 xe^{-x} dx = \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - \left[[-e^{-x} \cdot x]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \right] = e - [e^x]_0^1 - \left(-\frac{1}{e} - [-e^{-x}]_0^1 \right) = \\ &= e - e - \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} \right) = \frac{2}{e} \end{aligned}$$