

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.29

α) Πρέπει $x^2 + 1 \geq 0$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x\sqrt{x^2 + 1} + (x^2 + 1) + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 + 2 \cdot x \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

(Ειδικότερα, $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\sqrt{x^2 + 1} + x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι έστω :

i) $x \geq 0$ και $\sqrt{x^2 + 1} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = -x$

Άτοπο αφού $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ και $-x < 0$

ii) $x < 0$ και $\sqrt{x^2 + 1} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = -x > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 + 1 = x^2 \Rightarrow 1 = 0$ άτοπο)

β) $f(x^3 - x + 1) = f(2) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow}_{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} x^3 - x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 = 0$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 - x - 1 = 0$ έχει

μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$

Έστω $g(x) = x^3 - x - 1$, $x \in [1, 3]$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1, 3]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{array}{l} g(1) = -1 \\ g(3) = 5 \end{array} \right\} g(1) \cdot g(3) = -5 < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, η εξίσωση

$$g(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x - 1 = 0 \text{ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα } (1, 3).$$

Άρα και η αρχική (ισοδύναμη) εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$

Είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$

$$\text{τέτοιο ώστε : } f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, 3]$

Είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi_2 \in (2, 3)$

$$\text{τέτοιο ώστε : } f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,3]$

Είναι παραγωγίσιμη στο $(1,3)$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi \in (1,3)$

$$\text{τέτοιο ώστε : } f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{2}$$

Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$, $\xi_2 \in (2,3)$, $\xi \in (1,3)$ τέτοια ώστε :

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(2) - f(1) + f(3) - f(2) = f(3) - f(1) = 2f'(\xi)$$