

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.28

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3\alpha x^2 + \beta$

Η ευθεία $y = 4x - 2$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1, f(1))$, οπότε :

$$\begin{cases} f'(1) = 4 \\ f(1) = 4 \cdot 1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 4 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2 - \alpha = 4 \\ \beta = 2 - \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2 \\ \beta = 2 - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

β) Για $\alpha = \beta = 1$, $f(x) = x^3 + x$, $f'(x) = 3x^2 + 1$

Είναι $f'(x) = 3x^2 + 1 > 3x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Παρατηρούμε ότι $f(2) = 2^3 + 2 = 10$

Άρα η ανίσωση γράφεται :

$$f(x^3 + x) > 10 \Rightarrow f(x^3 + x) > f(2) \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} x^3 + x > 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + x - 2 > 0$$

$$\text{Σχήμα Horner} \quad \begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & 1 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) > 0 \stackrel{\substack{x^2+x+2>0 \\ \Delta=-7<0}}{\Rightarrow} (x-1) > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^2 + 1} \eta \mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + x}{x^2 + 1} \eta \mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \eta \mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \eta \mu \frac{1}{x}$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ ισχύει : } -1 \leq \eta \mu \frac{1}{x} \leq 1 \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

i) $x > 0$

$$(1) \Rightarrow -x \leq x \eta \mu \frac{1}{x} \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\text{Άρα από κριτήρια παρεμβολής, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$$

ii) $x < 0$

$$(1) \Rightarrow x \leq x \eta \mu \frac{1}{x} \leq -x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\text{Άρα από κριτήριο παρεμβολής, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0 \quad \text{και συνεπώς} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^2 + 1} \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$$