

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Γ 36.27

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με :

$$f'(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{x}{2} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} + 1 = \frac{\ln^2 x}{2} + \ln x + 1 = \frac{\ln^2 x + 2 \ln x + 2}{2}$$

Έστω $\ln x = y \in \mathbb{R}$ για κάθε $x > 0$

Το τριώνυμο $y^2 + 2y + 2$ έχει $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$

Άρα $y^2 + 2y + 2 > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{\ln^2 x + 2 \ln x + 2}{2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με :

$$f''(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x}}{2} = \frac{1}{x} (\ln x + 1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} (\ln x + 1) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

Τα πρόσημα της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$			- 0 +	
$f(x)$			σ.κ.	

Η f είναι κοίλη στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$, κυρτή στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

β) $f(x^4 + 2x) = f(4) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow}_{f:1-1} x^4 + 2x = 4 \Leftrightarrow x^4 + 2x - 4 = 0$

Άρα αρκεί να βρούμε θετικό ακέραιο α ώστε η $x^4 + 2x - 4 = 0$ να έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(\alpha, \alpha+1)$.

Έστω $g(x) = x^4 + 2x - 4$, $x > 0$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$

$$\left. \begin{array}{l} g(1) = -1 \\ g(2) = 16 \end{array} \right\} g(1) \cdot g(2) = -16 < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιο

ώστε $g(x_0) = 0$. Επομένως η αρχική εξίσωση που είναι ισοδύναμη με την $g(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$ δηλαδή στο $(\alpha, \alpha + 1)$ για $\alpha = 1$

γ) Στο ερώτημα α) αποδείξαμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$$\text{Οπότε με } \pi > e \stackrel{f: \nearrow}{\Rightarrow} f(\pi) > f(e) \Rightarrow \frac{\pi}{2} \ln^2 \pi + \pi > \frac{e}{2} \cdot \ln^2 e + e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \ln^2 \pi + \pi > \frac{e}{2} + e \Rightarrow \pi \ln^2 \pi + 2\pi > 3e$$

δ) $x \ln^2 x + 2x < 2$, $x \in (0, 1)$

$$\Rightarrow \frac{x \ln^2 x}{2} + x < 1 \Rightarrow f(x) < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \stackrel{f: \nearrow}{\Rightarrow} 0 < x < 1$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (0, 1)$