

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.24

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο A , με: $f'(x) = 1 + \ln x - 2 = \ln x - 1$, $x > 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$			↘ ↗	

Οπότε, η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0, e]$, και γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$

- β) Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = e$, το $f(e) = -e$

Άρα $f(x) \geq -e$, για κάθε $x > 0$

$$\Rightarrow x \ln x - 2x \geq -e \Rightarrow x \ln x \geq 2x - e \xrightarrow{x>0} \ln x \geq 2 - \frac{e}{x}, \text{ για κάθε } x > 0$$

- γ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E(\Omega) = \int_1^e |f(x)| dx$

Στο διάστημα $[1, e]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα για $1 < x < e \xrightarrow{f: \searrow} f(1) > f(x) > f(e) \Rightarrow$

$$\Rightarrow -2 > f(x) > -e \Rightarrow f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (1, e)$$

Άρα $|f(x)| = -f(x)$ στο $(1, e)$

$$\text{Οπότε } E(\Omega) = -\int_1^e f(x) dx = -\int_1^e (x \ln x - 2x) dx =$$

$$= -\int_1^e x \ln x dx + \int_1^e 2x dx = -\left[\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx \right] + \left[x^2 \right]_1^e =$$

$$= -\left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right] + e^2 - 1 = \frac{3e^2 - 5}{4}$$