

- α) Η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 0$, πρέπει :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\bullet f(0) = \alpha + e^0 = \alpha + 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\text{Άρα πρέπει } \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

β) $\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \notin \mathbb{R}$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

- γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = e^x > 0$ για κάθε $x < 0$.

Στο $(0, +\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \ln x + 1$, $x > 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$			$\searrow$	$\searrow$	

Οπότε, η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

- δ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \int_1^e |f(x)| dx$

$$\text{Για κάθε } x \in (1, e) \Rightarrow f(x) = x \ln x > 0$$

διότι $x > 0$ και $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$