

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.22

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right) - (x + \ln x)}{x^2} = \frac{x+1-x-\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$$

$$f(e) = \frac{e+1}{e}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	1	e	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$				$\frac{e+1}{e}$	



 ολικό
μέγιστο

Οπότε, η f

είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$, γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$

Στο $x_0 = e$, η f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο το $f(e) = \frac{e+1}{e}$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\gamma) I = \int_1^{e^2} f(x) dx = \int_1^{e^2} \frac{x + \ln x}{x} dx = \int_1^{e^2} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) dx =$$

$$= e^2 - 1 + 1 \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \stackrel{\substack{\ln x = y \\ \frac{1}{x} dx = dy \\ \ln e^2 = 2 \\ \ln 1 = 0}}{=} e^2 - 1 + \int_0^2 y dy = e^2 - 1 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = e^2 - 1 + 2 = e^2 + 1$$