

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.21

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

α) Η ευθεία $\varepsilon: x - 3y + 6 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{3}$

Η εφαπτόμενη της f στο σημείο $A(2, f(2))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(2)$ και είναι κάθετη στην ε , άρα

$$f'(2) \cdot \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow f'(2) = -3$$

$$\text{Είναι } f'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2} + \alpha$$

$$f'(2) = -3 \Rightarrow -4 + \alpha = -3 \Rightarrow \alpha = 1$$

β) Για $\alpha = 1$ η f γράφεται: $f(x) = \frac{4}{x-1} + x$ οπότε $f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2} + 1$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4}{(x-1)^2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$						

Οπότε, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1)$, γνησίως φθίνουσα στο $(1, 3]$, γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

γ) Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Στο $x_0 = 1$, σημείο ασυνέχειας της f :

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{4}{x-1} + x \right) = +\infty$, διότι
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ και $x-1 > 0$ για $x > 1$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{4}{x-1} + x \right) = -\infty$, γιατί
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$ και $x-1 < 0$ για $x < 1$

Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2 - x} + 1 \right) = 0 + 1 = 1 = \lambda$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x-1} + x - x \right) = 0$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x^2 - x} + 1 \right) = 0 + 1 = 1 = \lambda$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x-1} + x - x \right) = 0$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

δ) Έχουμε $f(-1) = -3$ και $f(3) = 4$.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να χαράξουμε την γραφική παράσταση της f

