

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.20

α) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \mid g(x) \in A_f\}$

$$\begin{aligned} \text{Άρα πρέπει: } \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{3-5x}{x-2} \geq 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{3-5x}{x-2} - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{3-5x-x+2}{x-2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{5-6x}{x-2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (5-6x)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{5}{6} \leq x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } A_{f \circ g} = \left[\frac{5}{6}, 2 \right)$$

Η $f \circ g$ έχει τύπο

$$f \circ g(x) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{\frac{3-5x}{x-2}-1} = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}, \quad x \in \left[\frac{5}{6}, 2 \right)$$

β) Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{5}{6}, 2 \right)$ με

$$\varphi'(x) = \frac{\left(\frac{5-6x}{x-2} \right)'}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}} = \frac{\frac{-6(x-2)-(5-6x)}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}} = \frac{7}{2(x-2)^2 \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}}$$

Τα πρόσημα της φ' η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$		2	$+\infty$
$\varphi'(x)$		0	-		
$\varphi(x)$					

Οπότε, η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{6}, 2 \right)$

Ελέγχουμε για ύπαρξη ακροτάτου στο $x_0 = \frac{5}{6}$, άκρο του A_φ , στο οποίο δεν ορίζεται η φ' (κρίσιμο σημείο)

Είναι $\varphi\left(\frac{5}{6}\right) = 0$ και προφανώς $\varphi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{5}{6}, 2 \right)$. Άρα η φ παρουσιάζει στο $x = \frac{5}{6}$ (ολικό) ελάχιστο.

γ) Η φ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

Η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $A_\varphi = \left[\frac{5}{6}, 2 \right)$, άρα έχει

$$\text{σύνολο τιμών το } f(A_\varphi) = \left[\varphi\left(\frac{5}{6}\right), \lim_{x \rightarrow 2^-} \varphi(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}} = +\infty ,$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x-2 = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} 5-6x = -7$$

$$\text{Άρα } f(A_\varphi) = A_{\varphi^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$\text{Έστω : } \varphi(x) = y \Rightarrow \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}} = y \Rightarrow \frac{5-6x}{x-2} = y^2 \Rightarrow 5-6x = xy^2 - 2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(y^2 + 6) = 5 + 2y^2 \Rightarrow x = \frac{5+2y^2}{y^2+6} \Rightarrow \varphi^{-1}(y) = \frac{5+2y^2}{y^2+6}$$

$$\text{Άρα } \varphi^{-1}(x) = \frac{5+2x^2}{x^2+6} , \quad x \geq 0$$