

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.2

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(3,2) \Rightarrow f(3)=2$

$$\Rightarrow \frac{\alpha \cdot 3 - 1}{3 + 1} = 2 \Rightarrow 3\alpha - 1 = 8 \Rightarrow 3\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{3x-1}{x+1}, x \neq -1$$

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.

Θα αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$. Πράγματι :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3x_1-1}{x_1+1} = \frac{3x_2-1}{x_2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x_1-1)(x_2+1) = (3x_2-1)(x_1+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{3x_1x_2} + 3x_1 - x_2 \cancel{-1} = \cancel{3x_1x_2} + 3x_2 - x_1 \cancel{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ Άρα η } f(x) \text{ είναι 1-1}$$

γ) Δείξαμε ότι η f είναι 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το σύνολο τιμών της f , το οποίο θα βρούμε πρώτα

Η f ως ρητή, έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ και είναι

$$\text{παραγωγίσιμη σ' αυτό με } f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{3x} + 3 - \cancel{3x} - 1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -4 \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = -4 \cdot (+\infty) = -\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία της f καθώς και τα όρια της στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα
Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1)$ η συνάρτηση είναι γνησίως

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \right) = (3, +\infty)$$

στο διάστημα $A_2 = (-1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 3)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	3	$+\infty$ $-\infty$	3

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

Ακόμη

Θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x :

$$\frac{3x-1}{x+1} = y \Rightarrow 3x-1 = y(x+1) \Rightarrow 3x-1 = xy+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - xy = y+1 \Rightarrow x(3-y) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{3-y}, \quad y \neq 3$$

Επομένως $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3-y}$, $y \neq 3$, οπότε η αντίστροφη

συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x}$, $x \neq 3$

δ) Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} θα βρεθούν από την λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{3x-1}{x+1} = \frac{x+1}{3-x}, \quad x \neq -1, 3$$

$$\Rightarrow (3x-1)(3-x) = (x+1)^2 \Rightarrow 9x - 3x^2 - 3 + x = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Για } x = 1, \quad f(1) = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1 + 1} = 1 = f^{-1}(1)$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} τέμνονται στο $B(1,1)$