

- α) Η h έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$h'(x) = \frac{e^x(1+e^{2x}) - 2e^{2x} \cdot e^x}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^{2x} = 0 \Rightarrow e^{2x} = e^0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Τα πρόσημα της h' η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

Οπότε, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο

$$x_0 = 0 \text{ το } h(0) = \frac{1}{2}$$

- β) Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η h είναι γνησίως αύξουσα,

$$\text{άρα } h(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(0) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\text{Άρα } h(A_1) = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

Στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$ η h είναι γνησίως φθίνουσα,

$$\text{άρα } h(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(0) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x} = 0$$

$$\text{Άρα } h(A_2) = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{Το σύνολο των τιμών της } h \text{ είναι το } h(A_1) \cup h(A_2) = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

- γ) Η h είναι συνεχής, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x + e^{2x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x} + 2xe^{2x}} =$$

$$\stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x + 2e^x + 4xe^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{4e^x + 4xe^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4 + 4xe^{2x}} = 0$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 + 4xe^{2x}) = +\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} = 0$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1+e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x(1+e^{2x})} \right) = 0$

γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(1+e^{2x}) = -\infty(1+0) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{0}{1+0} = 0$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $-\infty$

$$\delta) \int_0^1 e^x h(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \int_0^1 \left[\frac{\ln(1+e^{2x})}{2} \right]' dx =$$

$$= \left[\frac{\ln(1+e^{2x})}{2} \right]_0^1 = \frac{\ln(1+e^2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$$