

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

α) Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική, και συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Αφού από εκφώνηση η f είναι συνεχής, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned} & \bullet f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - \alpha) = -\alpha \end{aligned} \right\} \text{πρέπει } -\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -1$$

β) Για $\alpha = -1$ είναι $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} - x, & x \geq 0 \\ x^2 + 1, & x < 0 \end{cases}$

Ελέγχουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - x}{x} =$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{x > 0 \text{ για } x \rightarrow 0^+}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - 1 \right)}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

Οπότε $f'(0) = 0$, άρα το $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ακόμη όπως αποδείξαμε στο β), είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$.

$$\text{Άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1, & x \geq 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

Για $x < 0$ προφανώς είναι $f'(x) < 0$

Για $x \geq 0$ είναι

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = x \Rightarrow x^2 + 1 = x^2 \quad \text{αδύνατη}$$

Ακόμη για κάθε $x > 0$ είναι

$$x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$			

Οπότε, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

δ) Η f είναι συνεχής, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}{x} =$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x > 0 \\ |x| = x}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)}{x} = \sqrt{1 + 0} - 1 = 0 = \lambda \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \quad \text{αφού} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = +\infty$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$

Για $x < 0$ η $f(x)$ είναι πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού, συνεπώς δεν έχει ασύμπτωτες.