

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.17

α) Πρέπει $x^2 = 2x + 10 \geq 0$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x + 10$ έχει διακρίνουσα $4 - 4 \cdot 10 = -36 < 0$

Άρα $x^2 - 2x + 10 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

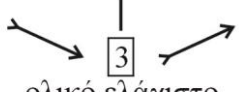
Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Οπότε, η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 3$

Άρα $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			
	ολικό ελάχιστο		

γ) Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}}}{x} =$$

$$\stackrel{x > 0 \text{ για } x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{|x|=x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}} = 1 = \lambda$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x + 10} - x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 10} - x)(\sqrt{x^2 - 2x + 10} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x + 10} + x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 10 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 10} + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 10}{\sqrt{x^2 - 2x + 10} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-2 + \frac{10}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{-2}{2} = -1 = \beta$$

Άρα η ευθεία $\varepsilon_1 : y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}}}{x} =$$

$$\stackrel{x < 0 \text{ για } x \rightarrow -\infty}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ |x| = -x}} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}} = -1 = \lambda$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 10} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 10} + x)(\sqrt{x^2 - 2x + 10} - x)}{\sqrt{x^2 - 2x + 10} - x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 10 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 10} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 10}{|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-2 + \frac{10}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{-2}{-2} = 1 = \beta$$

Άρα η ευθεία $\varepsilon_2 : y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

- δ) Με βάση τα παραπάνω είναι εύκολο να χαράξουμε την γραφική παράσταση της f η οποία φαίνεται στο διπλανό σχήμα

